VITTORIO EM. III

FONDO PIZZOFALCONE

NAZIONALE
B. Prov.
Miscellanea
C
8
53
BIBLIOTECA
VITTORIO EM. III
NAPOLI

BIBLIOTECA PROVINCIALE
misc. fo. 8. 53
Armadio XXV
Palchetto 13
Num.° d' ordine 79

Digitized by Google

NOUVELLE MÉTHODE

POUR LA RÉSOLUTION

DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

D'UN DEGRÉ QUELCONQUE.

Digitized by Google

NOUVELLE MÉTHODE

POUR LA RÉSOLUTION

DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

D'UN DEGRÉ QUELCONQUE;

D'après laquelle tout le calcul exigé pour cette Résolution se réduit à l'emploi des deux premières règles de l'Arithmétique :

PAR F. D. BUDAN, D. M. P.

« On peut regarder ce point comme le plus important de toute l'Analyse..... » Il conviendroit de donner dans l'Arithmétique, les règles de la Résolution des » Équations numériques, sauf à renvoyer à l'Algèbre la démonstration de celles » qui dépendent de la théorie générale des Équations [*Traité de la Résolution* » *des Equations numériques de tous les degrés, par* J. L. LAGRANGE; *Leçons* » *du même auteur aux Ecoles normales*] ».

A PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

ANNÉE 1807.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III

A L'EMPEREUR ET ROI.

SIRE,

TANDIS que les Muses qui président à la Poésie et à l'Éloquence s'empressent, à l'envi, d'offrir leurs tributs à VOTRE MAJESTÉ, la Muse des Hautes Sciences pourroit-elle demeurer en retard ? Les Sciences et les

Arts doivent surtout l'hommage de leurs découvertes à un Prince qui joint au pouvoir de les protéger, l'avantage d'être, par ses vastes connoissances, un juste appréciateur de leurs progrès.

Vous le savez, SIRE, les inventions dans l'Analyse algébrique sont des phénomènes assez rares. Peut-être aussi VOTRE MAJESTÉ jugera-t-elle que la Méthode que j'ai eu le bonheur de découvrir, n'est pas sans quelque utilité. Quels résultats, en effet, n'a-t-on pas droit d'en attendre dans ces recherches physico-mathématiques, où l'on est conduit à des équations d'un degré tant soit peu élevé, qui jusqu'à ce jour déconcertoient les plus savans calculateurs, et dont la résolution, par la nouvelle Méthode, sera désormais l'ouvrage des arithméticiens les moins versés dans les profondeurs de la Science.

Par ce double motif, j'ose espérer que V. M. daignera me permettre de Lui dédier ce produit d'une longue méditation.

Je suis, avec le plus profond respect,

SIRE,

DE VOTRE MAJESTÉ

Le très-humble, très-obéissant
et très-fidèle Sujet,
F. D. BUDAN, D. M. P.

AVANT-PROPOS.

Cet Ouvrage traite d'une matière sur laquelle se sont exercés les plus célèbres Analystes, depuis Viète jusqu'à M. Lagrange ; c'est-à-dire, depuis le premier âge de l'Algèbre jusqu'à nos jours.

Avant les écrits de M. Lagrange sur la résolution des équations numériques, les travaux multipliés de ses prédécesseurs n'avoient abouti qu'à des méthodes incertaines, et rebutantes dans la pratique. Celle qu'il a publiée est exempte d'incertitude, mais on convient généralement que la pratique en est encore assez rebutante. Elle ne permettroit certainement pas de remplir le vœu de cet illustre Géomètre, qui voudroit qu'on enseignât, dans l'Arithmétique même, les règles de la résolution des équations numériques.

C'est donc pour nous conformer à son desir que nous avons cherché une méthode d'une théorie plus simple, qui fût en même temps sûre et vraiment usuelle, susceptible, en un mot, d'être pratiquée par les commençans eux-mêmes. Cette méthode simple et facile, nous sommes parvenus à la découvrir ; et nous avons ainsi couronné assez heureusement, ce semble, les travaux de deux siècles sur cet objet.

Il a paru convenable de présenter d'abord une histoire abrégée de ces travaux : on pourra, d'après cette notice, juger de l'importance attachée par les plus grands Géomètres, au problême de la résolution des équations numériques.

Nous donnons ensuite un algorithme qui fait trouver, par de simples additions et soustractions, tous les termes des transformées en $(x-1)$, $(x-2)$, etc., d'une équation donnée en x. Cet algorithme a reçu, le 23 mai 1803, l'approbation de la première Classe de l'Institut.

Digitized by Google

Puis, après avoir rappelé diverses notions fournies par l'Algèbre, concernant les équations numériques, nous exposons successivement les trois parties dont se compose la nouvelle Méthode. Nous faisons voir quels sont les cas dans lesquels la première partie suffit toute seule à la résolution de l'équation; quels sont ceux dans lesquels il faut joindre la seconde à la première; et dans quels cas, enfin, l'on est obligé de recourir à la troisième pour découvrir les limites des racines incommensurables. Cette dernière partie sert aussi à approcher, jusqu'à telle décimale qu'on voudra, de la valeur exacte des racines dont on a déjà des limites.

Cet écrit est terminé par des Notes contenant des détails qui nous ont paru d'une assez grande importance pour nous faire desirer qu'elles soient lues avec la même attention que le corps de l'Ouvrage.

La première partie de notre Méthode a obtenu, le 31 octobre 1803, l'approbation de la première Classe de l'Institut, qui a reconnu, dans ce nouveau procédé, *une Méthode générale*, *directe et sûre*, pour résoudre une équation numérique, dans les cas où l'on sait que toutes ses racines sont réelles. Des circonstances particulières ont empêché de présenter à cette même Classe la suite de notre travail; mais nous ne craignons pas d'avancer que les deux autres parties complètent l'ouvrage commencé dans la première.

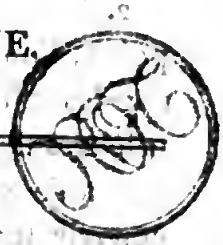
Digitized by Google

NOUVELLE MÉTHODE

POUR LA RÉSOLUTION

DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

D'UN DEGRÉ QUELCONQUE.



CHAPITRE PREMIER.

Histoire abrégée des travaux entrepris sur cette matière pendant les deux derniers siècles.

1. Le problême de la Résolution des Équations numériques peut être regardé, suivant l'illustre successeur d'Euler, comme le point le plus important de toute l'Analyse. La raison qu'il en donne est que la solution de tout problême déterminé conduit à une ou plusieurs équations numériques, c'est-à-dire, dont les coefficiens sont donnés en nombres; que tout le calcul qu'on a fait est en pure perte, si l'on n'a pas les moyens de résoudre ces équations; que dès le troisième degré l'expression algébrique des racines est insuffisante pour

Digitized by Google

faire connoître, dans tous les cas, leur valeur numérique ; qu'à plus forte raison le seroit-elle, si on parvenoit enfin à l'obtenir pour les équations des degrés supérieurs ; et qu'on seroit toujours forcé de recourir à d'autres moyens pour déterminer, en nombres, les valeurs des racines d'une équation donnée ; détermination qui est, en dernier résultat, l'objet de tous les problêmes que le besoin ou la curiosité offrent à résoudre. [*Séances des Ecoles Normales*, tom. 3, p. 463, 476.]

2. Indépendamment d'une autorité aussi grave sur ce point, l'importance de ce problême est assez démontrée par les efforts multipliés d'un grand nombre d'analystes célèbres des XVIIe et XVIIIe siècles, pour obtenir une méthode générale, directe et sûre, propre à faire découvrir toutes les racines réelles d'une équation numérique donnée. Nous allons présenter une légère esquisse des travaux de ces analystes, en prenant pour guide l'illustre auteur déjà cité.

3. Viète qui, le premier, s'occupa de la résolution des équations numériques d'un degré quelconque, y employa des opérations analogues à celles qui servent à extraire les racines des nombres. Harriot, Ougtred, etc., ont essayé de faciliter la pratique de sa méthode. « Mais » la multitude des opérations qu'elle demande, et l'incer» titude du succès dans un grand nombre de cas, l'ont » fait abandonner entièrement, avant la fin du XVIIe siècle ». [*De la Résolution des Equations numériques, par M. Lagrange*, pag. 1.]

4. La méthode de Newton a succédé à celle de Viète. Ce n'est proprement qu'une méthode d'approximation,

Digitized by Google

qui suppose qu'on connoît déjà la racine cherchée, à une quantité près, moindre que le dixième de cette racine. « Elle ne sert, comme on voit, que pour les » équations numériques qui sont déjà à-peu-près résolues; » de plus, elle n'est pas toujours sûre; elle a encore l'in- » convénient de ne donner que des valeurs approchées » des racines mêmes qui peuvent être exprimées exacte- » ment en nombres, et de laisser en doute si elles sont » commensurables ou non ». [*De la Résolution des Equations numériques*, p. 3.]

5. La méthode que Daniel Bernoulli a déduite de la considération des séries récurrentes, et qu'Euler a exposée dans son Introduction à l'Analyse infinitésimale, n'offre aussi qu'un moyen d'approximation. « Cette méthode » et celle de Newton, quoique fondées sur des principes » différens, reviennent à-peu-près au même, dans le fond, » et donnent des résultats semblables ». [*De la Résolution* etc., p. 152.]

6. Ce fut Hudde qui trouva qu'en multipliant chaque terme d'une équation donnée par l'exposant de l'inconnue, et en égalant le produit total à zéro, on obtient une équation qui renferme les conditions de l'égalité des racines de la proposée. Rolle, de l'Académie des Sciences, découvrit ensuite que les racines de l'équation ainsi formée sont les limites de celles de l'équation proposée. Ce principe est la base de sa méthode des *Cascades*, publiée d'abord sans démonstration, dans son Traité d'Algèbre en 1690. Cette méthode a été ainsi nommée, parcequ'elle fait dépendre la détermination des limites de chacune des racines de l'équation

proposée, de la résolution de différentes équations successives, qui vont toujours en baissant d'un degré. « La longueur des calculs que cette méthode demande, » et l'incertitude qui naît des racines imaginaires, l'ont » fait abandonner depuis longtemps » [*De la Résolution*, etc. p. 166]. Rolle, dans ce même Traité d'Algèbre, assigne pour limite de la plus grande valeur de l'inconnue, le plus grand coefficient négatif de l'équation, augmenté d'une unité ; le coefficient du premier terme étant 1.

7. La méthode de Stirling, pour déterminer le nombre et les limites des racines réelles du troisième et du quatrième degré, a été généralisée depuis par Euler, dans son Traité du Calcul différentiel. « Elle revient dans le » fond à celle de Rolle ». [*De la Résolution* etc., p. 166.]

8. En 1747, le célèbre Fontaine donna, sans démonstration, une nouvelle méthode. *Je la donne*, disoit-il, *pour l'analyse en entier, que l'on cherche si inutilement depuis l'origine de l'Algèbre.* Cette méthode suppose que l'on peut toujours, par la substitution des nombres 1, 2, 3, etc., au lieu de l'inconnue, dans les équations qu'elle emploie, trouver deux nombres qui donnent deux résultats de signes différens : « ce qui n'a » lieu, dit M. Lagrange, qu'autant que ces équations » ont des racines positives, dont la moindre différence » est plus grande que l'unité ; (*ou, pour parler plus* » *exactement, qu'autant qu'il y a de ces racines qui ne* » *sont pas comprises, en nombre pair, entre deux nombres* » *entiers consécutifs*). D'après cette considération, il est » facile de trouver des exemples où la méthode de Fon-

» taine est en défaut ». [*De la Résolution* etc., p. 162.]

9. Ce défaut avoit lieu également dans toute méthode qui emploie les substitutions pour déterminer les limites des racines réelles et inégales d'une équation numérique, lorsque M. Lagrange publia, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1767, un nouveau procédé, le seul jusqu'ici qui ait offert un moyen direct et sûr d'obtenir cette détermination. Son Mémoire contenoit aussi une méthode pour approcher, autant qu'on veut et en employant l'expression la plus simple, de la valeur exacte d'une racine, lorsque l'on connoît le plus grand nombre entier compris dans cette valeur.

Le procédé dû à M. Lagrange, consiste à substituer successivement, à la place de l'inconnue, dans l'équation débarrassée des racines égales qu'elle peut avoir, les termes d'une progression arithmétique $0, D, 2D, 3D$, etc., dont la différence D soit moindre que la plus petite différence des diverses racines de cette équation. La grande difficulté étoit de trouver ce nombre D: le génie fécond de l'illustre géomètre lui fournit trois manières d'y parvenir.

10. La première, qu'il proposa en 1767, exige le calcul de l'équation qui a pour racines les différences entre les racines de l'équation proposée. « Mais, dit » M. Lagrange, pour peu que le degré de l'équation » proposée soit élevé, celui de l'équation des différences » monte si haut, qu'on est effrayé de la longueur du » calcul nécessaire pour trouver la valeur de tous les » termes de cette équation; puisque le degré de la pro-

» posée étant m, on a $\frac{m(m-1)}{2}$ coefficiens à calculer. » [*Par exemple, pour une équation du dixième degré, » la transformée seroit du quarante-cinquième*].

» Comme cet inconvénient pouvoit rendre la mé- » thode générale presque impraticable dans les degrés » un peu élevés, je me suis longtemps occupé des » moyens de l'affranchir de la recherche de l'équation » des différences, et j'ai reconnu en effet que, sans cal- » culer entièrement cette équation, on pouvoit néan- » moins trouver une limite moindre que la plus petite » de ses racines; ce qui est le but principal du calcul de » cette même équation». [*De la Résolution* etc., p. 124.]

11. La seconde manière de trouver le nombre D est consignée dans les leçons que l'auteur donna aux Ecoles Normales, en 1795. Elle demande le calcul d'une équation du même degré que la proposée, ayant pour ses racines les différentes valeurs dont est susceptible le coefficient Y de l'avant-dernier terme d'une équation en $(x-a)$; a étant une racine réelle quelconque de la proposée, dont x est l'inconnue. « Mais cette équation » en Y, dit M. Lagrange, peut encore être fort longue » à calculer, soit qu'on la déduise de l'élimination, soit » qu'on veuille la chercher directement par la nature » même de ses racines ». [*De la Résolution* etc., p. 127.]

12. Ce coefficient Y étant une fonction de x, l'auteur a fait depuis réflexion qu'on pouvoit toujours éliminer l'inconnue x du produit du polynome Y, multiplié par un polynome ξ à coefficiens indéterminés, procédant suivant les puissances $m-1$, $m-2$, etc., de x; en

Digitized by Google

faisant disparoître du produit $Y\xi$, au moyen de la proposée, toutes les puissances de x plus hautes que x^{m-1}, puis égalant à o chacun des multiplicateurs de x, ce qui donne la valeur des coefficiens indéterminés de ξ, et réduit le produit $Y\xi$ à son terme tout connu représenté par K, d'où $Y=\frac{K}{\xi}$. Par suite de ces opérations, les coefficiens de l'équation inverse de celle aux différences, qui étoient divisés par Y, ne sont plus affectés que d'un diviseur indépendant de x, et la recherche de D en devient moins pénible. Ce troisième procédé, publié en 1798, est moins rebutant que les deux autres; néanmoins son auteur reconnoît qu'*il peut entraîner dans des calculs assez longs.* [*De la Résolution* etc., p. 223.]

13. « Le nombre D [*trouvé d'une de ces trois manières*] » pourra être souvent beaucoup plus petit qu'il ne seroit » nécessaire pour faire découvrir toutes les racines; mais, » dit M. Lagrange, il n'y a à cela d'autre inconvénient que » d'augmenter le nombre des substitutions successives à » faire pour x dans la proposée » [*Séances des Ecoles Normales*, tome 3, p. 466]. Cet inconvénient paroît encore assez grave dans la pratique, car il peut, en certains cas, donner lieu à des milliers, et même à un nombre indéfiniment plus grand, d'opérations superflues. Du reste, l'auteur l'a considérablement diminué, en donnant le moyen d'opérer, par de simples additions et soustractions, les substitutions de nombres entiers qui suivent celles des m premiers nombres 1, 2, 3, etc., dans une équation du degré m.

14. Il semble donc que la méthode de la limite de la

plus petite différence des racines, qui d'ailleurs porte l'empreinte du génie de son immortel auteur, ne réponde pas, en tout point, à l'objet qu'il s'est proposé, qui est de « déterminer les premières valeurs à substituer » pour x, desorte que, d'un côté, *on ne fasse pas trop » de tâtonnemens inutiles*, et que, de l'autre, on soit » assuré de découvrir, par ce moyen, toutes les racines » réelles de l'équation » [*Séances des Ecoles Normales*, tome 3, p. 477]. Nous ferons voir dans les chapitres suivans qu'on peut, à beaucoup moins de frais et sans recourir à cette longue et pénible recherche de la limite de la moindre différence des racines, se procurer toujours cette assurance.

15. En outre, le desir du célèbre auteur étant que les règles de la résolution des équations numériques soient données dans l'arithmétique, sauf à renvoyer à l'algèbre les démonstrations qui dépendent de cette dernière science, ne peut-on pas dire que ce vœu ne se trouve point rempli par une méthode dont la théorie est trop compliquée, et la pratique trop difficile pour des commençans?

16. Il restoit donc encore à glaner dans ce même champ où M. Lagrange a recueilli une si abondante moisson. Nous avons cherché à réaliser son projet, en découvrant une méthode nouvelle d'une théorie simple et d'une application facile. Nous présentons aux jeunes élèves un aliment de facile digestion, dont peut-être ils nous sauront quelque gré. Nous n'osons nous flatter d'obtenir le même accueil des personnages consommés dans la science: suivant un ancien adage, les mouches ne sont

point la pâture des aigles, *aquila non capit muscas.* On voudra bien cependant observer que les méthodes des anciens, lesquelles supposoient un grand travail, une grande force de tête, ont cédé la place, dans l'enseignement, à des méthodes modernes plus à la portée du vulgaire; nous espérons que cette considération préservera d'un superbe dédain les procédés aussi faciles à pratiquer qu'à concevoir, que nous offrons en ce moment au public.

17. A cette considération il en faut joindre une autre, tirée du besoin que l'on a d'une méthode qui soit praticable et vraiment usuelle pour la résolution des équations numériques, si l'on veut que l'algèbre puisse s'appliquer convenablement aux arts et aux besoins de la société. Nous rappellerons, à ce sujet, ce que disoit l'académicien Rolle, lorsqu'il publia sa méthode des *Cascades.* « Lors» qu'on a envisagé toutes les conditions qui sont néces» saires pour le succès d'une entreprise, on pourroit sou» vent s'aider de l'algèbre pour y réussir ou pour en » connoître l'impossibilité; mais on aime mieux chercher » d'autres conditions, ou tenter l'exécution par différens » moyens, que d'avoir recours à cette science, et, en cela, » on a eu quelque raison : car si l'on veut se servir de » l'algèbre dans l'invention d'une machine ou pour quel» qu'autre recherche, en n'employant d'ailleurs que les » expériences des physiciens et les principes des géomètres, » on arrivera à des égalités (*équations*) irrationnelles d'un » degré fort élevé, et il est plus difficile d'éviter ces éga» lités dans cette application, que d'éviter les fractions » quand on pratique l'arpentage. Cependant les règles » qu'on a données jusqu'ici pour résoudre ces égalités, ne

» sont ni scientifiques ni générales, et il suffit de les éprou-» ver pour en être rebuté ». On a aujourd'hui, à la vérité, des *règles scientifiques et générales*; mais quel est celui qui, les ayant essayées, pourra dire qu'elles ne sont pas rebutantes ?

18. Si dans cette esquisse des travaux de deux siècles, concernant la résolution des équations numériques, l'immortel Descartes semble avoir été oublié, c'est que nous nous sommes réservé d'en parler ailleurs. Comment aurions-nous pu oublier sa fameuse règle des variations et des permanences de signes, publiée pour la première fois en 1637, et qui, longtemps négligée, reçoit dans notre méthode une application nouvelle, et, en quelque sorte, une nouvelle existence ?

CHAPITRE II.

PROBLÊME PRÉLIMINAIRE: *Etant donnée une équation numérique en* x *d'un degré quelconque, trouver, par de simples additions et soustractions, les coefficiens de sa transformée en* (x — 1); *et généralement, de sa transformée en* (x — n), n *étant un nombre entier ou décimal.*

19. AVANT que de donner la solution de ce problême, nous expliquerons ce qu'il faut entendre par les sommes premières, secondes, troisièmes, etc., d'une suite de termes.

Lorsqu'une suite de termes quelconques étant donnée, on forme une autre suite *sommatoire* de la première, c'est-à-dire, qui a pour loi que son $n^{ième}$ terme soit la somme des n premiers termes de la suite donnée, cela s'appelle prendre les *sommes premières*, ou simplement les sommes de la première suite.

Ce mot *somme* doit s'entendre dans le sens algébrique; il exprime l'excédant de la somme des termes précédés d'un des signes + ou — sur celle des termes précédés du signe contraire.

Prendre ensuite les sommes de ces sommes premières, cela s'appelle prendre les *sommes-secondes* de la suite

donnée. De même, les sommes de ces *sommes-secondes* s'appellent les *sommes-troisièmes* de la première suite, et ainsi du reste.

Voici un exemple de ces diverses sommes :

Suite donnée.....	1...	1...	1...	1...	1.
Sommes-premières.....	1...	2...	3...	4...	5.
Sommes-secondes.....	1...	3...	6...	10...	15.
Sommes-troisièmes.....	1...	4...	10...	20...	35,
	etc.		etc.		

Les suites dont on s'est servi dans ce premier exemple, appartiennent à celles des nombres que les Géomètres appellent *nombres figurés*, lesquelles ont généralement pour 1er terme, l'unité ; pour 2e terme, un nombre entier m ; et pour terme $n^{ième}$, un nombre exprimé par $\frac{m(m+1)....(m+n-2)}{1.2.....(n-1)}$

Autre exemple, dans lequel la suite donnée est composée de termes pris arbitrairement, les uns positifs, les autres négatifs :

Suite donnée.....	2+	5—	3+	4—	3+	0—	1.
Sommes-premières..	2+	7+	4+	8+	5+	5+	4.
Sommes-secondes...	2+	9+	13+	21+	26+	31+	35.
Sommes-troisièmes..	2+	11+	24+	45+	71+	102+	137.
	etc.		etc.				

20. Voici maintenant deux propositions d'où résulte la solution demandée. (*Pour leur démonstration, voyez ci-après les* NOTES.)

Digitized by Google

Première proposition. La somme $m^{ième}$ des n premiers termes d'une suite quelconque, égale la somme de ces termes multipliés respectivement, mais en ordre inverse, par les n premiers nombres figurés de l'ordre m, c'est-à-dire, appartenant à la suite dont le second terme est m.

Ainsi la somme $m^{ième}$ des n premiers termes de cette suite.....

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_{n-1}$$

est égale à.... $A_{n-1} + mA_{n-2} + \ldots\ldots + \frac{m\ldots\ldots(m+n-2)}{1\ldots\ldots(n-1)} A_0$.

Par exemple, la somme-troisième de ces quatre termes $2 + 5 - 3 + 4$ est $(1\times4 - 3\times3 + 6\times5 + 10\times2) = 45$, de même qu'on l'a reconnu plus haut en prenant les sommes et les sommes de sommes.

Seconde proposition. Un polynome quelconque, procédant suivant les puissances entières et positives d'une quantité x, depuis le degré m jusqu'au degré zéro, se transforme en un autre polynome d'égale valeur, procédant suivant les mêmes puissances de $(x - 1)$, dont les coefficiens respectifs, à commencer par celui du dernier terme, sont,

1°. La somme-première de tous les coefficiens du polynome donné.

2°. La somme-seconde de tous les coefficiens, hormis le dernier.

3°. La somme-troisième de ces coefficiens, excepté les deux derniers. Et ainsi de suite.

Digitized by Google

Soit, par exemple, ce polynome

$$2x^3 - 3x^2 + 5x - 3.$$

Coefficiens donnés . . . $2 - 3 + 5 - 3.$
Sommes-premières . . . $2 - 1 + 4 + 1.$
Sommes-secondes. . . . $2 + 1 + 5.$ . .
Sommes-troisièmes . . . $2 + 3.$ . . . .
Sommes-quatrièmes. . . $2.$ . . . . . .

Ainsi les coefficiens du polynome en $(x-1)$ sont....

$$2 + 3 + 5 + 1 ;$$

et l'on a

$$2(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 5(x-1) + 1 = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 3.$$

Cette équation a lieu, quelque valeur qu'on donne à x.

S'il manque dans le polynome proposé quelque puissance de x, il faut la mettre en évidence, en lui donnant zéro pour coefficient.

Soit, par exemple, $x^3 - 7x + 7.$

Coefficiens donnés. . . . $1 + 0 - 7 + 7.$
Sommes-premières . . . $1 + 1 - 6 + 1.$
Sommes-secondes . . . . $1 + 2 - 4.$ . .
Sommes-troisièmes . . . $1 + 3.$ . . . .
Sommes-quatrièmes. . . $1.$ . . . . . .

On a donc....

$$x^3 - 7x + 7 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 - 4(x-1) + 1.$$

21. Il est évident qu'une équation dont le premier membre est égal à zéro, offre précisément le même cas que le polynome de la proposition précédente. Ainsi l'algorithme par lequel on obtient la transformée en $(x-1)$ d'une équation donnée en x, consiste dans le

Digitized by Google

même procédé employé pour la transformation d'un polynome d'une valeur quelconque.

Etant donc donnée l'équation....

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

les coefficiens de sa transformée en $(x-1)$ sont....

$$1 + 3 - 4 + 1.$$

Pareillement, pour l'équation....

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

les coefficiens de sa transformée en $(x-1)$ sont....

$$1 + 3 + 1 - 6.$$

22. Par le même algorithme, on passera de la transformée en $(x-1)$ à celle en $(x-2)$; de celle-ci à la transformée en $(x-3)$; et ainsi de suite indéfiniment.

On obtiendra donc très-promptement les coefficiens de ces diverses équations.

Coefficiens des équations, dans le 1er exemple du n° 21...

en x	1 + 0 −	7 ± 7
en $(x-1)$. . .	1 + 3 −	4 + 1
en $(x-2)$. . .	1 + 6 +	5 + 1
en $(x-3)$. . .	1 + 9 +	20 + 13
etc.	etc.	

Coefficiens des équations, dans le second exemple....

en x	1 + 0 −	2 − 5
en $(x-1)$. . .	1 + 3 +	1 − 6
en $(x-2)$. . .	1 + 6 +	10 − 1
en $(x-3)$. . .	1 + 9 +	25 + 16
etc.	etc.	

23. Il est aisé d'observer que par ces transformations, on finit par avoir des coefficiens qui sont tous de même signe.

Observons aussi que si l'équation proposée n'est que du troisième degré, on peut obtenir les coefficiens de ses transformées successives par un moyen encore plus rapide que l'algorithme général. Nos lecteurs le devineront sans peine à la simple inspection des coefficiens représentés dans le n° précédent. Dans ce cas, le calcul des transformées s'opère instantanément, sans avoir besoin d'écrire d'autres chiffres que ceux qu'on voit ici.

24. Le même algorithme fournit le moyen d'obtenir les transformées en $(x-10)$, $(x-20)$, $(x-30)$, etc.; celles en $(x-100)$, $(x-200)$, $(x-300)$, etc.; etc.

Il faut, pour cela, substituer dans la proposée une inconnue x' qui soit, respectivement, dix fois, cent fois, etc. moindre que x. Les coefficiens de cette équation en x' s'obtiennent, comme l'on sait, sans calcul, par le placement convenable de la virgule qui indique les décimales.

On se procure ensuite les transformées en $(x'-1)$, $(x'-2)$, $(x'-3)$, etc.; ou, ce qui revient au même, en $\left(\frac{x-10}{10}\right)$, $\left(\frac{x-20}{10}\right)$, $\left(\frac{x-30}{10}\right)$, etc.; ou bien en.... $\left(\frac{x-100}{100}\right)$, $\left(\frac{x-200}{100}\right)$, $\left(\frac{x-300}{100}\right)$, etc.; selon qu'on a fait $x'=\frac{x}{10}$, ou $x'=\frac{x}{100}$, etc.

Il ne s'agit plus que de rendre les inconnues de ces transformées, respectivement, dix ou cent fois, etc. aussi

grandes ; ce qui s'opère par le déplacement convenable de la virgule dans leurs coefficiens.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^3 - 4x^2 + 3x - 6 = 0,$$

dont on demande les transformées en $(x-10)$, $(x-20)$, etc.

On fera $x = 10x'$; d'où....

$$x'^3 - 0{,}4x'^2 + 0{,}03x' - 0{,}006 = 0.$$

Coefficiens des équations....

en x'.....	1	−0,4	+ 0,03	− 0,006
en $\left(\frac{x-10}{10}\right)$ ou $(x'-1)$...	1	+ 2,6	+ 2,23	+ 0,624
en $\left(\frac{x-20}{10}\right)$ ou $(x'-2)$...	1	+ 5,6	+ 10,43	+ 6,454
	etc.		etc.	

Et par conséquent on aura, pour les coefficiens des équations....

en $(x-10)$...	1	+ 26	+ 223	+ 624
en $(x-20)$...	1	+ 56	+ 1043	+ 6454
	etc.		etc.	

On voit aisément comment, par une marche analogue, on se procureroit les transformées en $(x-\frac{1}{10})$, $(x-\frac{2}{10})$, etc. ; celles en $(x-\frac{1}{100})$, $(x-\frac{2}{100})$, etc. ; etc.

25. Si l'on veut avoir l'équation où l'inconnue de la proposée est diminuée d'un nombre de plusieurs chiffres, par exemple, l'équation en $(x-312)$; on se procurera d'abord l'équation en $(x'-3)$, en faisant $x = 100x'$; et par suite, celle en $(x-300)$, comme il vient d'être indiqué.

Puis on fera $x - 300 = 10x'$; on obtiendra l'équation en $(x'-1)$; et par suite, celle en $(x-310)$. De cette

dernière, on passera à celle en $(x-311)$; et de celle-ci à l'équation demandée en $(x-312)$.

Voici, par exemple, la marche qu'il faudroit suivre, si la proposée était....

$$x^3-4x^2+3x-6=0.$$

Soit $x=100x'$; d'où

$$x'^3-0{,}04x'^2+0{,}0003x'-0{,}000006=0.$$

Coefficiens des équations.....

en x' ..... 1 — 0,04 + 0,0003 — 0,000006
en $(x'-1)$... 1 + 2,96 + 2,9203 + 0,960294
en $(x'-2)$... 1 + 5,96 + 11,8403 + 7,840594
en $(x'-3)$... 1 + 8,96 + 26,7603 + 26,640894

Ainsi les coefficiens de l'équation en $(x-300)$ sont....

1 + 896 + 267603 + 26640894.

Faisant ensuite $x-300=10x'$, on a les coefficiens des équations...

en x' ..... 1 + 89,6 + 2676,03 + 26640,894
en $(x'-1)$... 1 + 92,6 + 2858,23 + 29407,524.

Or $x'-1=\frac{x-310}{10}$; il s'ensuit qu'on aura les coefficiens des équations....

en $(x-310)$... 1 + 926 + 285823 + 29407524
en $(x-311)$... 1 + 929 + 287678 + 29694274
en $(x-312)$... 1 + 932 + 289539 + 29982882.

Il est aisé de voir comment on obtiendroit l'équation où l'inconnue de la proposée seroit diminuée d'un nombre décimal de plusieurs chiffres; par exemple, l'équation en $\left(x-\frac{312}{100}\right)$: nous ne nous arrêterons point à ces détails.

Digitized by Google

26. En considérant le tableau des opérations par lesquelles on passe d'un polynome en x à son équivalent en $(x-1)$ [20], on n'aura pas de peine à reconnoître comment on peut passer réciproquement d'un polynome en $(x-1)$ à son équivalent en x; et parconséquent, de celui en x à son équivalent en $(x+1)$, et ainsi de suite. Dans le premier cas, on a pris des *sommes*; dans le second, on prend des *différences*.

Choisissons pour exemple, le polynome en x du n° 20, dont les coefficiens sont....

$$2-3+5-3;$$

et son équivalent en $(x-1)$, qui a pour coefficiens....

$$2+3+5+1.$$

Pour passer de celui-ci à l'autre, on écrit ses coefficiens et on procède comme il suit :

Coefficiens du polynome en $(x-1)$		2 + 3 + 5 + 1
Suites dans chacune desquelles le $n^{ième}$ terme est la différence du terme qui le précède au terme $n^{ième}$ de la suite supérieure...	1ère	2 + 1 + 4 − 3
	2ième	2 − 1 + 5....
	3ième	2 − 3.....
	4ième	2.....

On obtient ainsi les coefficiens du polynome en x, et l'on se procurera de la même manière ceux du polynome en $(x+1)$. En voici le tableau

Coefficiens du polynome en x		2 − 3 + 5 − 3
Suites de différences prises suivant la loi qui vient d'être indiquée.....	1ère	2 − 5 + 10 − 13
	2ième	2 − 7 + 17.....
	3ième	2 − 9.....
	4ième	2.....

Les coefficiens obtenus pour le polynome en $(x+1)$, sont....

$$2-9+17-13;$$

ce qu'il est d'ailleurs aisé de vérifier par le procédé inverse.

27. On a remarqué ci-dessus qu'en opérant les transformations successives en $(x-1)$, $(x-2)$, etc., on parvient à une transformée en $(x-u)$, dont tous les termes sont de même signe. Ici l'on observera que les transformations en $(x+1)$, $(x+2)$, etc. conduisent à une transformée en $(x\pm u')$, dont les termes ne présentent que des *variations* de signe, comme on le remarque dans le polynome en $(x+1)$ du dernier exemple, dont les coefficiens sont alternativement précédés du signe $+$ et du signe $-$. Lorsqu'on est une fois parvenu à ce polynome en $(x+u')$, les transformées ultérieures en $(x+u'+1)$, $(x+u'+2)$, etc. n'offriront aucune *permanence* de signe: cela s'apperçoit par la nature même du procédé.

Les équations du troisième degré sont susceptibles d'une abréviation analogue à celle qui est indiquée au n° 23.

Digitized by Google

CHAPITRE III.

Diverses notions fournies par l'Algèbre, concernant les équations numériques.

28. On peut toujours transporter dans un même membre tous les termes d'une équation, ensorte qu'elle paroisse sous cette forme :

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots\ldots + A_{m-1}x^1 + A_mx^0 = 0 ;$$

m étant un nombre entier positif; les coefficiens ayant par eux-mêmes une valeur positive ou négative, et quelques-uns pouvant aussi être nuls. C'est sous cette forme que nous considérerons toujours les équations.

Le but principal qu'on se propose dans la résolution d'une équation déterminée, est de trouver exactement ou par approximation, s'il y a lieu, tous les nombres réels, dont la substitution, à la place de l'inconnue, rend nulle la somme de tous les termes du premier membre. On donne à ces nombres le nom de *racines réelles de l'équation ;* elles sont ou positives ou négatives.

29. Le nombre des racines réelles d'une équation ne peut jamais surpasser m, c'est-à-dire, le nombre qui en indique le degré; il peut lui être inférieur, ou même être nul. L'excédant de m sur le nombre des racines réelles est nécessairement un nombre pair, indicateur du nombre des racines imaginaires qui satisfont à l'équation.

On entend par quantité imaginaire, le symbole d'un résultat d'opération, impossible à obtenir, à raison de

son absurdité : par exemple, la racine quarrée d'une quantité négative, telle que $\sqrt{-4}$.

Toute racine ou quantité imaginaire se peut réduire à l'une de ces formes, $\pm A + \sqrt{-B}$, et $\pm A - \sqrt{-B}$, A et B étant des quantités réelles. Si une équation a une de ses racines sous une de ces formes, elle en a nécessairement une sous l'autre ; les racines imaginaires se trouvant ainsi toujours unies par couples.

30. Toute équation qui a pour racine un nombre $\pm n$, est divisible par le facteur $x \mp n$; celle qui a une couple de racines imaginaires, est divisible par le facteur réel du second degré, $x^2 \mp 2Ax + A^2 + B$.

Généralement, une équation du degré m est le produit de m facteurs simples, soit réels, soit imaginaires : le nombre des facteurs simples réels est égal à celui des racines réelles de l'équation.

31. Lorsque, par la substitution d'un nombre n à la place de x, la somme de tous les termes de l'équation est rendue égale à une quantité positive ; et que la substitution d'un autre nombre n' donne au contraire un résultat négatif, on est assuré qu'il y a une ou plusieurs racines en nombre impair, dont la valeur est comprise entre n et n', et réciproquement.

Mais la substitution ne donne point de résultats de signes différens, lorsque les racines comprises entre n et n' sont en nombre pair.

La substitution de quelque nombre que ce soit ne donne que des résultats positifs, lorsque l'équation n'a que des racines imaginaires.

Digitized by Google

32. Quand on change, dans une équation, le signe des termes du rang pair, ou de ceux du rang impair, les racines de l'équation, après ce changement, sont les mêmes qu'avant, au signe près; c'est-à-dire que les racines négatives deviennent positives, et que les positives deviennent négatives.

Il s'ensuit que pour trouver toutes les racines réelles d'une équation, il suffit de savoir trouver les racines positives.

33. Toute équation de degré impair a, pour le moins, une racine réelle positive, si son dernier terme est négatif; ou une racine réelle négative, si ce terme est positif.

Dans les équations de degré pair, il y a toujours, pour le moins, une racine réelle positive, et une autre négative, si le dernier terme est négatif; mais si ce terme est positif, on n'en peut rien conclure pour la réalité des racines.

34. Le résultat de la substitution d'un nombre $\pm n$, à la place de x, dans une équation donnée, est égal au terme tout connu de sa transformée en $(x \mp n)$. Par conséquent $\pm n$ est une racine de la proposée, lorsque le dernier terme de la transformée en $(x \mp n)$ est égal à zéro. Et généralement, la proposée a autant de racines égales à $\pm n$, qu'il y a, dans cette transformée, de termes consécutifs, à commencer par le dernier, qui égalent zéro.

35. La somme du coefficient du premier terme d'une équation et du plus grand coefficient de signe contraire étant prise sans qu'on ait égard aux signes, et divisée par le premier coefficient, le quotient est plus grand que la plus grande racine positive qui puisse appartenir à l'équa-

tion ; et ce quotient s'appelle une limite de cette plus grande racine.

Si le coefficient du premier terme de l'équation est $+1$, le plus grand coefficient négatif, pris positivement et augmenté de l'unité, est une limite de la plus grande racine positive.

On a, pour obtenir une limite plus approchée de la plus grande racine positive, divers moyens qu'il est inutile de rappeler ici. Observons seulement qu'on peut souvent y parvenir en faisant $x=10x'$, ou $x=100x'$, etc., l'équation en x' pouvant indiquer une limite de la plus grande valeur de x', qui décuplée, ou centuplée, etc., donne pour x une nouvelle limite beaucoup plus rapprochée.

Exemple....

Equation en x.....$x^4+2x^3+3x^2-4510=0$

Equation en $x'=\frac{x}{10}$...$x'^4+0{,}2x'^3+0{,}03x'^2-0{,}04510=0$;

la limite en plus de x' étant 1,04510, celle de x est 10,4510 ; et cette dernière est bien plus resserrée que 4512, limite indiquée par le plus grand coefficient négatif de l'équation en x. Cette limite plus resserrée peut se reconnoître à la seule vue de la proposée, par une simple opération mentale.

Le terme tout connu de l'équation étant divisé par la somme de ce terme et du plus grand coefficient de signe contraire, prise sans égard pour les signes, le quotient est plus petit que la plus petite racine positive que l'équation puisse avoir ; il en est une limite.

36. L'Algèbre fournit le moyen de préparer une équation, de manière que son premier terme n'ait d'autre

coefficient que l'unité, et que les autres coefficiens soient tous des nombres entiers. Il en résulte que les équations à résoudre peuvent toutes être considérées comme ramenées à cette forme.

L'équation ainsi préparée ne peut avoir pour racines réelles que des nombres entiers ou des nombres fractionnaires irrationnels. En général, ces racines irrationnelles ne sont susceptibles d'être déterminées que par approximation.

37. L'Algèbre donne aussi le moyen de débarrasser une équation des racines égales qu'elle peut avoir, ensorte que les racines multiples n'y subsistent plus que comme racines simples. Ainsi les équations à résoudre peuvent être considérées comme n'ayant que des racines inégales.

38. Une équation ne peut avoir plus de racines réelles positives, qu'il n'y a de variations dans la succession des signes de ses coefficiens; ni plus de racines réelles négatives, qu'il ne s'y trouve de permanences de signes: telle est la fameuse règle de Descartes.

Ainsi, dans le cas où toutes les racines de l'équation sont réelles, il y a précisément autant de racines positives que de variations de signe, et autant de racines négatives que de permanences.

Quand un des coefficiens de l'équation est zéro, et que les coefficiens du terme précédent et du suivant sont de même signe, l'équation a nécessairement des racines imaginaires.

On peut reconnoître si une équation a toutes ses racines réelles ou non, au moyen de l'équation dont les racines

Digitized by Google

sont les quarrés des différences des racines de la proposée. Dans le premier cas, cette équation aux quarrés des différences n'a que des variations de signe ; tandis qu'elle a nécessairement des permanences, si la proposée a des racines imaginaires. Mais le calcul des coefficiens de cette équation est en général tellement pénible, qu'on n'est guères tenté d'employer ce moyen.

39. On peut déduire de la règle de Descartes, les deux propositions suivantes :

1°. Une équation en x, dont toutes les racines sont réelles, a autant de racines comprises entre zéro et p, qu'il y a de permanences de signe dans la transformée en $(x-p)$, de plus que dans l'équation en x.

2°. Une équation de cette espèce ne peut avoir, soit une, soit deux, soit n racines comprises entre zéro et p, si sa transformée en $(x-p)$ n'a pas, respectivement, une, ou deux, ou n permanences de signe, de plus que l'équation en x.

Nous avons même de fortes raisons de croire que la seconde proposition est applicable à une équation quelconque.

CHAPITRE IV.

Exposition de la nouvelle Méthode. Première Partie. Cas où l'on n'a besoin que de cette partie de la Méthode.

40. Nous allons maintenant exposer successivement les divers procédés qui constituent notre Méthode, en renvoyant aux nos du chapitre précédent, où sont contenus les principes qui servent de base aux résultats que l'on obtient par ces procédés. Pour concevoir le rapport des uns aux autres, il suffit au lecteur qui ne seroit point assez avancé dans l'Algèbre, de tenir les principes pour démontrés, sans chercher à en connoître la démonstration; et s'il ne veut que posséder le *mécanisme* de la Méthode, il n'a besoin que de savoir opérer les transformations, conformément à l'algorithme du second chapitre.

41. Etant donc donnée une équation en x du degré m, on se procurera ses transformées successives en $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne à une transformée en $(x-u)$, dont les coefficiens soient tous de même signe.

Cette dernière transformée ne pouvant point avoir de racine positive, le nombre entier u est une limite de la plus grande valeur positive de l'inconnue.

Digitized by Google

S'il arrive que la proposée elle-même n'offre que des permanences de signe, il ne reste à chercher que les racines négatives qu'elle peut avoir, et on procédera comme il sera dit plus bas [44].

42. Lorsque le dernier coefficient d'une équation qui a pour inconnue $(x-p)$, est égal à zéro, l'équation en x a une racine égale au nombre p; et plus généralement, si n coefficiens consécutifs de la transformée, à compter du dernier, sont égaux chacun à zéro, la proposée a n racines égales, chacune, à p [34]. Par cette circonstance, l'équation en $(x-p)$ se trouve abaissée de n degrés.

A raison de cet abaissement, il peut y avoir quelque avantage à ne débarrasser l'équation de ses racines égales, qu'après avoir opéré les transformations du n° 41.

43. Lorsque le dernier coefficient d'une équation en $(x-p)$ est de signe contraire à celui de la transformée en $(x-p-1)$, la proposée a une ou plusieurs racines en nombre impair, dont la valeur est comprise entre p et $p+1$. Car les coefficiens dont il s'agit, expriment précisément les résultats que donne la proposée, quand on y met successivement p et $p+1$ à la place de x [31].

44. Les racines négatives de la proposée étant, au signe près, égales aux racines positives qu'auroit cette équation si les signes de ses termes pairs étoient tous changés, on fera ce changement, puis on opérera comme ci-dessus [41], et on obtiendra des résultats analogues.

45. Par cette première partie de la Méthode, on trouve,

en certains cas, toutes les racines réelles de l'équation, soit exactement, soit approximativement, à moins d'une unité près.

Un premier cas est celui où la proposée n'a ni racines imaginaires, ni plusieurs racines réelles comprises entre deux nombres entiers p et $p+1$.

Un second cas est celui où l'on sait d'avance que toutes les racines de la proposée sont réelles, encore que parmi ces racines, il y en ait d'incommensurables comprises, en tel nombre que ce soit, entre deux nombres entiers consécutifs.

Un troisième cas a lieu, lorsqu'on sait que l'équation n'a qu'une racine réelle, positive ou négative, ou bien qu'elle en a deux, l'une positive, et l'autre négative, ainsi qu'il arrive dans des équations de cette forme, $x^m \mp A = 0$.

46. *Premier exemple.* Soit l'équation....

$$x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27 = 0.$$

Coefficiens des équations....

en x	1	− 10	+ 36	− 54	+ 27
en $(x-1)$	1	− 6	+ 12	− 8	+ 0
en $(x-2)$	1	− 3	+ 3	− 1	
en $(x-3)$	1	+ 0	+ 0	+ 0.	

Les racines de cette équation sont donc 1 et 3; cette dernière racine est triple [42], c'est-à-dire que la proposée est divisible par $(x-3)^3$.

Second exemple.... $x^3 - 5x^2 + x + 7 = 0$.

Coefficiens des équations.....

en x.....1 — 5 + 1 + 7
en $(x-1)$...1 — 2 — 6 + 1
en $(x-2)$...1 + 1 — 7 — 6
en $(x-3)$...1 + 4 — 2 — 11
en $(x-4)$...1 + 7 + 9 — 8
en $(x-5)$...1 + 10 + 26 + 9.

La proposée a donc deux racines positives incommensurables, dont les valeurs sont respectivement comprises entre 1 et 2, et entre 4 et 5. Pour avoir ensuite la racine négative, on change les signes des termes de rang pair dans la proposée [44], et l'on a....

$$x^3 + 5x^2 + x - 7 = 0.$$

Coefficiens des équations.....

en $x = -x$ . . 1 + 5 + 1 — 7
en $(x-1)$. . . 1 + 8 + 14 + 0.

Donc la racine négative de la proposée est — 1.

Troisième exemple.... $x^3 - 7x + 7 = 0$.

Coefficiens des équations....

en x. . . . . 1 + 0 — 7 + 7
en $(x-1)$. . . 1 + 3 — 4 + 1
en $(x-2)$. . . 1 + 6 + 5 + 1.

Coefficiens des équations....

en $x = -x$. . . 1 — 0 — 7 — 7
en $(x-1)$. . . 1 + 3 — 4 — 13
en $(x-2)$. . . 1 + 6 + 5 — 13
en $(x-3)$. . . 1 + 9 + 14 — 1
en $(x-4)$. . . 1 + 12 + 35 + 23.

Digitized by Google

L'équation proposée étant de celles qu'on sait avoir toutes ses racines réelles, il en résulte que non-seulement elle a une racine négative dont la valeur est entre -3 et -4 [43], mais aussi qu'elle a deux autres racines positives comprise entre 1 et 2, parceque la transformée en $(x-2)$ a deux permanences de signe de plus que celle en $(x-1)$ [39]. Telle est, dans ce cas, la conséquence de la règle de Descartes.

Quatrième exemple.... $x^3 - 1745 = 0$.

Coefficiens des équations....

en x	$\cdots\cdots$	$1+$	$0+$	$0-1745$
en $(x-1)$	$\cdots$	$1+$	$3+$	$3-1744$
en $(x-2)$	$\cdots$	$1+$	$6+$	$12-1737$
en $(x-3)$	$\cdots$	$1+$	$9+$	$27-1718$
en $(x-4)$	$\cdots$	$1+$	$12+$	$48-1681$
en $(x-5)$	$\cdots$	$1+$	$15+$	$75-1620$
en $(x-6)$	$\cdots$	$1+$	$18+$	$108-1529$
en $(x-7)$	$\cdots$	$1+$	$21+$	$147-1402$
en $(x-8)$	$\cdots$	$1+$	$24+$	$192-1233$
en $(x-9)$	$\cdots$	$1+$	$27+$	$243-1016$
en $(x-10)$	$\cdots$	$1+$	$30+$	$300-745$
en $(x-11)$	$\cdots$	$1+$	$33+$	$363-414$
en $(x-12)$	$\cdots$	$1+$	$36+$	$432-17$
en $(x-13)$	$\cdots$	$1+$	$39+$	$507+452$.

Donc la racine de l'équation est entre 12 et 13.

47. Nous avons suivi dans ce dernier exemple, la marche la plus longue; car il est aisé de voir que x devant être un nombre entier, exprimé par deux chiffres,

Digitized by Google

on pouvoit d'abord se procurer les transformées en $(x-10)$, $(x-20)$, etc., par le procédé indiqué plus haut [24], en faisant d'abord $x = 10x'$, ce qui changeoit l'équation en..... $x'^3 - 1{,}745 = 0$.

Coefficiens des équations....

en x' ..... $1 + 0 + 0 - 1{,}745$

en $\left(\frac{x-10}{10}\right)$ ou $(x'-1)$ ... $1 + 3 + 3 - 0{,}745$

en $\left(\frac{x-20}{10}\right)$ ou $(x'-2)$ ... $1 + 6 + 12 + 6{,}255$

Et par conséquent....

en $(x-10)$ ... $1 + 30 + 300 - 745$

en $(x-20)$ ... $1 + 60 + 1200 + 6255$.

Donc la racine est entre 10 et 20. Il ne reste qu'à se procurer les transformées successives après celle en $(x-10)$, jusqu'à celle en $(x-19)$ tout au plus.

Coefficiens des équations....

en $(x-10)$ ... $1 + 30 + 300 - 745$

en $(x-11)$ ... $1 + 33 + 363 - 414$

en $(x-12)$ ... $1 + 36 + 432 - 17$

en $(x-13)$ ... $1 + 39 + 507 + 452$.

Et l'on conclura, comme plus haut, que la racine 3ième ou cubique de 1745 est entre 12 et 13.

La nouvelle Méthode offre donc un moyen d'extraire, par des additions et soustractions, la racine $m^{ième}$, exacte ou approchée, d'un nombre quelconque. Si l'on veut comparer cette méthode avec les anciens

procédés, nous laissons à juger lequel des deux moyens mérite la préférence.

48. Le procédé que nous avons employé dans le n° précédent, n'est pas applicable seulement aux équations à deux termes; on peut aussi l'employer dans une équation quelconque, toutes les fois qu'on aura sujet de penser, d'après l'examen des coefficiens de la proposée, que le plus grand nombre entier, faisant partie de la plus grande racine positive, peut être exprimé par plusieurs chiffres. Dans ce cas, il pourra être plus convenable de faire $x = 10x'$, ou $x = 100x'$, etc., et de se procurer d'abord les transformées en $(x - 10)$, $(x - 20)$, etc.; ou en $(x - 100)$, $(x - 200)$, etc, etc.; ou bien encore, de résoudre l'équation en x', à l'aide des transformées successives en $(x' - 1)$, $(x' - 2)$, etc.; puis d'en déduire les valeurs de x.

Ces remarques détruiront sans doute cette objection que l'irréflexion pourroit opposer à notre Méthode; savoir : « que si les racines étoient exprimées en nombres » un peu grands, la Méthode seroit impraticable » par sa longueur, et qu'on auroit beaucoup plus tôt » fait de chercher les mêmes choses par les méthodes » ordinaires ».

On peut se rassurer contre cette prétendue longueur, puisque le nombre des transformées successives exigées par cette Méthode, si faciles d'ailleurs à obtenir par notre Algorithme, est égal au nombre des chiffres qu'on veut avoir à la racine, plus la somme de ces mêmes chiffres considérés comme n'exprimant chacun que des

unités simples. Par exemple, pour avoir le nombre 812, le nombre des transformées seroit $3+8+1+2=14$.

49. Veut-on maintenant avoir, dans les cas précédens, des racines plus approchées, à telle unité décimale près qu'il plaira, on peut employer la méthode d'approximation qui sera exposée ci-après, au Chapitre VI.

CHAPITRE V.

Suite de l'exposition de la nouvelle Méthode. Seconde Partie. Cas où cette Partie, jointe à la première, suffit pour faire découvrir les limites de toutes les racines réelles d'une équation.

50. Les cas mentionnés dans le chapitre précédent ne sont pas les plus nombreux. Tantôt l'équation à résoudre n'a que des racines imaginaires; tantôt ses racines sont toutes réelles, mais on l'ignore, et plusieurs d'entr'elles ayant pour limites les mêmes nombres entiers p et $p+1$, on ne peut les découvrir toutes par les seules transformées en $(x-1)$, $(x-2)$, etc.; d'autres fois quelques-unes des racines sont réelles, et d'autres sont imaginaires, sans qu'on le sache ou qu'on soit instruit du nombre des unes ou des autres. Dans ces diverses circonstances, on aura recours à des transformées *collatérales*, en la manière qui va être expliquée.

51. Il faut d'abord observer que la résolution des équations se réduisant à la recherche des racines positives [32], cette recherche elle-même se réduit à celle des racines positives qu'une équation quelconque peut avoir au-dessous de l'unité. Ceci est une conséquence des transformations successives; car il est évident que pour connoître toutes les racines positives de l'équation en x, il suffit de connoître respectivement les racines positives inférieures à l'unité, 1°. de la proposée; 2°. de sa transformée

en $(x-1)$; 3°. de celle en $(x-2)$; et ainsi de suite, jusqu'à la dernière transformée qui conserve quelque variation de signe. On voit en effet que pour découvrir les racines que la proposée peut avoir entre p et $p+1$, il ne s'agit que de trouver dans l'équation en $(x-p)$, les valeurs de l'inconnue $(x-p)$ comprises entre o et 1. Tel est donc le problême dont il faut obtenir généralement la solution : Etant donnée une équation qui n'a point de racines égales, s'assurer si elle a, ou si elle n'a pas des racines comprises entre o et 1.

52. Lorsqu'on ignore si l'équation proposée a toutes ses racines réelles, l'examen de la succession des signes ne fournit plus un indice certain de l'existence des racines qui peuvent être comprises entre p et $p+1$. Si l'équation en $(x-p-1)$ a des permanences de signe de plus que l'équation en $(x-p)$, le signe du dernier terme dans chacune de ces équations étant le même, on peut seulement soupçonner qu'il y a des valeurs de $(x-p)$ entre zéro et un, et parconséquent des valeurs de x entre p et $p+1$; mais ce soupçon reste à vérifier.

D'une autre part, si la seconde proposition mentionnée au n° 39 étoit admise comme principe général pour une équation quelconque, ce principe fourniroit un motif constant d'exclusion contre toute valeur qu'on voudroit attribuer à $(x-p)$ entre zéro et un, toutes les fois que l'équation en $(x-p-1)$, n'a pas plus de permanence de signe que l'équation en $(x-p)$. Dès lors on détermineroit sur le champ, au moyen des exclusions qu'on seroit autorisé à prononcer, les seuls nombres entiers

Digitized by Google

parmi lesquels on doive chercher ceux qui sont, à moins d'une unité près, les racines de l'équation proposée. Comme nous n'apporterons point ici de preuves de la généralité de ce principe, nous allons recourir à un autre motif de rejet.

53. Soit, par exemple, cette équation....

$$x^3 - 4x^2 + 3x - 6 = 0;$$

l'équation inverse en z ou $\frac{1}{x}$ est, comme l'on sait, celle dont les coefficiens sont les mêmes que ceux de l'équation en x, mais en ordre inverse....

$$6z^3 - 3z^2 + 4z - 1 = 0.$$

La transformée en $(z-1)$ est....

$$6(z-1)^3 + 15(z-1)^2 + 16(z-1) + 6 = 0.$$

Cette transformée n'ayant que des permanences de signes, offre un indice ou *criterium* certain de l'absence de toute racine réelle entre zéro et un, dans l'équation en x. *Généralement l'équation en* x *ne peut avoir plus de racines entre* 0 *et* 1, *que la transformée en* $(z-1)$ *ou* $\left(\frac{1}{x} - 1\right)$ *n'a de variations de signe.*

Et si l'équation en $(z-1)$ a son dernier terme négatif, celle en x a, pour le moins, une racine réelle entre zéro et un.

54. Appliquons ce *criterium* à l'équation....

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

et faisons $\frac{1}{x} = z$, $\frac{1}{x-1} = z_1$, $\frac{1}{x-2} = z_2$, et ainsi de suite.

Digitized by Google

Coefficiens des équations....

en x.....1+0— 2— 5....en $(z-1)$....5+17+17+ 6
en $(x-1)$....1+3+ 1— 6....en (z_1-1)....6+17+13+ 1
en $(x-2)$....1+6+10— 1....en (z_2-1)....1— 7—23—16
en $(x-3)$....1+9+25+16.

Et pour la recherche des racines négatives, soit $x=-x$, $\frac{1}{x}=z$, etc.

Coefficiens des équations....

en x.....1—0—2+5....en $(z-1)$....5+13+11+4
en $(x-1)$....1+3+1+4.

Ces transformations collatérales suffisent, comme l'on voit, pour la résolution approximative de l'équation, à moins d'une unité près; elles donnent l'exclusion à tout nombre négatif; et elles excluent en même temps tout nombre positif, excepté le nombre 2, lequel est admis pour le plus grand nombre entier compris dans la racine, par le double motif que le dernier terme de l'équation en $(x-3)$ est de signe contraire à celui de l'équation en $(x-2)$, et que le dernier terme de l'équation collatérale en (z_2-1) est négatif: ces deux motifs coincident toujours ensemble.

55. Ces transformations suffisent aussi pour déterminer, à moins d'une unité près, les racines réelles d'une équation, toutes les fois qu'à chaque couple d'équations en $(x-p)$ et $(x-p-1)$, dont les derniers termes respectifs sont de même signe, correspond une équation collatérale en (z_p-1) qui n'a que des permanences de signe.

Digitized by Google

Exemple.... $x^4 - 12x^3 + 58x^2 - 132x + 121 = 0$.

Coefficiens des équations...

en x.....1—12+58—132+121...en $(z-1)$..121+352+388+192+36
en $(x-1)$...1— 8+28— 48+ 36...en (z_1-1).. 36+ 96+100+ 48+ 9
en $(x-2)$...1— 4+10— 12+ 9...en (z_2-1).. 9+ 24+ 28+ 16+ 4
en $(x-3)$...1+ 0+ 4+ 0+ 4...en (z_3-1).. 4+ 16+ 28+ 24+ 9
en $(x-4)$...1+ 4+10+ 12+ 9.

Les transformées collatérales donnant ici l'exclusion à tout nombre positif, et la proposée n'ayant point de permanence de signe, parconséquent point de racine négative, il s'ensuit que toutes ses racines sont imaginaires.

Autre exemple.... $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 6 - 12 = 0$.

Coefficiens des équations....

en x.....1— 5+ 5+ 6—12....en $(z-1)$....12+42+49+25+ 5
en $(x-1)$....1— 1— 4+ 5— 5....en (z_1-1).... 5+15+19+14+ 4
en $(x-2)$....1+ 3— 2— 2— 4....en (z_2-1).... 4+18+32+23+ 4
en $(x-3)$....1+ 7+13+ 7— 4....en (z_3-1).... 4+ 9—11—38—24
en $(x-4)$....1+11+40+58+32.

Puis on fait $x = -x$, $\frac{1}{x} = z$, etc.

Coefficiens des équations....

en x.....1+ 5+ 5— 6—12.....en $(z-1)$...12+54+85+ 51+ 7
en $(x-1)$...1+ 9+26+ 23— 7.....en (z_1-1)... 7+ 5—53—102—52
en $(x-2)$...1+13+59+106+52.

D'après les transformées collatérales, on reconnoît que les seules racines réelles de l'équation sont 3 et -1, à moins d'une unité près.

56. L'uniformité des signes dans l'équation en $(z-1)$ ne permettant pas d'attribuer aucune valeur à $(x-p)$ entre 0 et 1, on peut demander si la proposition inverse est également vraie; c'est-à-dire, si cette uniformité a toujours lieu, lorsque $x-p$ n'a aucune valeur positive

inférieure à l'unité. Si cela étoit, on voit que l'emploi des transformations collatérales ne fourniroit pas seulement un motif certain d'exclusion contre des nombres qui n'appartiennent pas aux racines de l'équation proposée, mais qu'il feroit aussi connoître avec certitude les nombres entiers qui sont, à moins d'une unité près, des racines de cette équation.

57. Pour obtenir la répons e àcette demande, il faut considérer que si $x-p$ n'a pas de valeur entre zéro et un, alors l'équation en z_1 ou $\frac{1}{x-p}$ n'ayant pas de valeur supérieure à l'unité, la transformée en (z_1-1) ne peut avoir pour racines réelles que des racines négatives. Donc tous les facteurs réels simples que cette transformée peut avoir, sont de la forme z_1-1+A; et si ces facteurs ne sont associés qu'à des facteurs du second degré de la forme $(z_1-1)^2+P(z_1-1)+Q$, (A, P et Q étant positifs par eux-mêmes), il est évident que la transformée en (z_1-1) n'a pour lors aucune variation de signe. Or cette forme des facteurs du second degré a toujours lieu dans la transformée, à l'exception d'un seul cas, savoir, celui où l'équation en $(x-p)$ a une ou plusieurs couples de racines imaginaires de la forme $+f\pm\sqrt{-\varphi}$; ensorte que f et φ étant l'un et l'autre moindres que l'unité, on ait $\varphi<f(1-f)$, et parconséquent $\varphi<\frac{1}{4}$.

En effet lorsque

$$x-p=f\pm\sqrt{-\varphi},\ z_1=\frac{1}{f\pm\sqrt{-\varphi}}=\frac{f\mp\sqrt{-\varphi}}{f^2+\varphi};$$

et

$$z_1-1=\frac{f}{f^2+\varphi}-1\mp\frac{\sqrt{-\varphi}}{f^2+\varphi},$$

la partie réelle $\frac{f}{f^2+\varphi} - 1$ ne peut être positive, à moins que le dénominateur $f^2 + \varphi$ ne soit plus petit que f; ce qui n'a lieu qu'autant que f et φ sont des fractions, et qu'on a $\varphi < f - f^2$, ou $\varphi < f(1-f)$; d'où il suit que φ est alors moindre que $\frac{1}{4}$ ou 0,25; vu que $\frac{1}{4}$ est, comme on sait, le plus grand produit que puisse donner une fraction multipliée par son complément à l'unité.

Ce cas est le seul qui, introduisant dans la transformée en $(z_p - 1)$ des facteurs de la forme $(z_p - 1)^2 - P(z_p - 1) + Q$, pourroit y donner lieu à des variations de signe, et laisser subsister la présomption de l'existence des racines entre zéro et un dans l'équation en $(x-p)$.

58. Ce cas d'exception s'évanouira nécessairement par l'effet des opérations ultérieures de notre Méthode, comme on va le voir dans le chapitre suivant. Mais il suit dès à présent, du numéro précédent, que la seconde partie de cette Méthode fait connoître avec certitude, tantôt l'absence de toute racine réelle dans l'équation en $(x-p)$ entre 0 et 1; tantôt l'alternative de l'existence de plusieurs racines entre zéro et 1, ou de celle d'une couple, au moins, de racines imaginaires, dont la partie réelle est une fraction proprement dite, tandis que la quantité précédée du signe — sous le signe radical, est moindre que $\frac{1}{4}$ ou 0,25, et même que le produit de la partie réelle par son complément à l'unité.

CHAPITRE VI.

Fin de l'exposition de la nouvelle Méthode. Troisième Partie.

59. Lorsqu'on sait avec certitude que la proposée a une ou plusieurs racines comprises entre p et $p+1$, il reste à trouver une valeur exacte de ces racines jusqu'au $n^{ième}$ chiffre décimal; et quand on a lieu seulement de présumer leur existence, il reste à opérer la vérification de ces racines douteuses. Un même procédé va remplir ce double objet; c'est-à-dire que la méthode d'approximation pour les racines déjà connues, sera en même temps une méthode de vérification et d'approximation pour celles qui ne sont que soupçonnées.

60. Soit qu'on ait la certitude que l'équation en $(x-p)$ a quelque racine comprise entre 0 et 1, soit qu'on se trouve seulement autorisé à le soupçonner, on fait $10(x-p)=x'$. Autant $x-p$ a de valeurs entre zéro et un, autant x' en doit avoir entre zéro et dix. Il faut donc, au moyen des transformées en $(x'-1)$, $(x'-2)$, etc., jusqu'à celles en $(x'-10)$ tout au plus, chercher les racines que l'équation en x' a ou peut avoir entre 0 et 10.

On se comporte dans cette recherche comme dans celle des racines de l'équation en x; et l'on parvient de cette

manière, soit à trouver la première décimale des racines dont la partie exprimée en nombre entier p est déjà connue; soit à reconnoître et à vérifier, à moins d'un dixième près, l'existence des racines comprises entre p et $(p+1)$, qui jusques-là étoit douteuse, et qui cesse de l'être, parceque ces mêmes racines ne se trouvent point comprises ensemble entre $\left(p+\frac{p'}{10}\right)$ et $\left(p+\frac{p'+1}{10}\right)$, les différences de ces racines entr'elles pouvant d'ailleurs être indéfiniment moindres que $\frac{1}{10}$; soit encore à détruire la présomption occasionnée par des racines imaginaires $f\pm\sqrt{-\varphi}$, dans le cas où le *criterium* ou moyen d'exclusion mentionné dans la seconde Partie [53], s'est trouvé en défaut [57].

61. On parvient, disons-nous, à détruire ce soupçon à l'aide des équations en $(x'-p')$ et en $(z'_{r}-1)$, toutes les fois au moins que le centuple de la fraction φ est égal ou supérieur à $\frac{1}{4}$; ou, ce qui revient au même, toutes les fois qu'on n'a pas $\varphi<\frac{1}{400}$, ou bien $\varphi<0{,}0025$.

Pour s'assurer de ceci, il ne faut que faire attention à l'équation $10(x-p)=x'$. Lorsqu'une valeur imaginaire de $(x-p)$ est $f\pm\sqrt{-\varphi}$, la valeur correspondante de x' est $10f\pm\sqrt{-100\varphi}$, et celle de $(x'-p')$ est..... $(10f-p')\pm\sqrt{-100\varphi}$, ou bien $f'\pm\sqrt{-100\varphi}$, si l'on fait $10f-p'=f'$. On raisonnera donc pour l'équation en $(z'_{r}-1)$, comme on a fait ci-dessus pour celle en $(z_{r}-1)$ [58].

62. Ce qui précède va s'éclaircir par l'exemple suivant.

Digitized by Google

Soit à résoudre l'équation....

$$X^3 - 51X^2 + 761X - 2655 = 0;$$

ou bien, X étant égalé à $10x$, soit proposée cette autre équation....

$$x^3 - 5{,}1x^2 + 7{,}61x - 2{,}655 = 0.$$

L'équation n'ayant point de permanence de signe, n'a point de racine réelle négative.

Coefficiens des équations....

en x.....1—5,1+7,61—2,655...en $(z-1)$...2,655+0,355—2,155—0,855
en $(x-1)$...1—2,1+0,41+0,855...en (z_1-1)...0,855+2,975+1,285+0,165
en $(x-2)$...1+0,9—0,79+0,165...en (z_2-1)...0,165—0,295—0,185+1,275
en $(x-3)$...1+3,9+4,01+1,275.

Donc zéro est admis comme racine approchée, à moins d'une unité près; le nombre 1 est exclus; le nombre 2 est à vérifier.

Pour l'approximation de la racine admise, soit $10x = x'$, $\frac{1}{x'} = z'$, etc.

Coefficiens des équations....

en x'.....	1	— 51	+ 761	— 2655
en $(x'-1)$....	1	— 48	+ 662	— 1944
en $(x'-2)$....	1	— 45	+ 569	— 1329
en $(x'-3)$....	1	— 42	+ 482	— 804
en $(x'-4)$....	1	— 39	+ 401	— 363
en $(x'-5)$....	1	— 36	+ 326	+ 0.

Donc $x' = 5$; d'où $x = 0{,}5$.

N. B. On voit que les équations collatérales en $(z'-1)$, $(z',-1)$, etc. sont inutiles dans cette circonstance, parceque la transformée en $(z-1)$ n'ayant qu'une variation de signe, il s'ensuit que x' ne peut avoir qu'une seule valeur entre 0 et 10, x n'en pouvant avoir qu'une entre zéro et un [53].

Pour la vérification des racines douteuses, soit.....
$10(x-2)=x'$, $\frac{1}{x'}=z'$, etc.

Coefficiens des équations....

en x'.....1+ 9—79+165.....en $(z'-1)$....165+416+346+98
en $(x'-1)$....1+12—58+ 96.....en (z'_1-1).... 96+230+184+51
en $(x'-2)$....1+15—31+ 51.....en (z'_2-1).... 51+122+106+36
en $(x'-3)$....1+18+ 2+ 36.

Donc x' n'a pas de valeur réelle positive; donc 2 est exclus, et l'équation est résolue.

63. *Autre exemple*.... $x^5-3x^4-3x^3+7x^2+8x+2=0$.

Coefficiens des équations....

en x.....1— 3— 3+ 7+ 8+ 2...en $(z-1)$... 2+18+ 59+ 86+54+12
en $(x-1)$...1+ 2— 5—10+ 6+12...en (z_1-1)...12+66+134+121+46+ 6
en $(x-2)$...1+ 7+13— 3—16+ 6...en (z_2-1)... 6+14— 7— 32—10+ 1
en $(x-3)$...1+12+51+88+50+ 8.

Coefficiens des équations....

en $x=-x$...1+3— 3— 7+8—2...en $(z-1)$...2+2—5—4+2+0
en $(x-1)$....1+8+19+12+2+0.

Donc une des valeurs de x est — 1, et les transformées collatérales ne permettent de soupçonner d'autres racines réelles qu'entre 2 et 3 et entre 0 et — 1.

Pour la vérification des racines douteuses positives, soit $10(x-2)=x'$, ou $x=2+\frac{x'}{10}$. On obtient l'équation en x' par une addition convenable de zéros dans les coefficiens de l'équation en $(x-2)$.

Coefficiens des équations....

en x'.....1+ 70+1300— 3000—161000+600000
en $(x'-1)$....1+ 75+1590+ 1330—161815+438371
en $(x'-2)$....1+ 80+1900+ 6560—154080+279552
en $(x'-3)$....1+ 85+2230+12750—134935+134013
en $(x'-4)$....1+ 90+2580+19960—102400+ 14145
en $(x'-5)$....1+ 95+2950+28250— 54375— 65625
en $(x'-6)$....1+100+3340+37680+ 11360— 88704
en $(x'-7)$....1+105+3750+48310+ 97145— 36223
en $(x'-8)$....1+110+4180+60200+205440+113088.

Donc x' a deux valeurs, l'une entre 4 et 5, l'autre entre 7 et 8; et parconséquent les racines positives de x sont, à moins d'un dixième près, 2,4 et 2,7.

N. B. L'équation en $(z_{,}-1)$ ou $\left(\frac{1}{x-2}-1\right)$ n'ayant que deux variations de signe, ne peut avoir que deux racines positives [53], et parconséquent $(x-2)$ ne peut avoir plus de deux valeurs entre 0 et 1, ni x' plus de deux valeurs entre 0 et 10: les transformées successives faisant ici connaître ces deux valeurs, il est inutile de calculer les collatérales.

Pour la vérification des racines négatives qui peuvent être comprises entre 0 et 1, on fera $10x = x'$, et par les transformées successives en $(x'-1)$, $(x'-2)$, etc., on trouvera deux valeurs pour x', comprises respectivement entre 4 et 5, et entre 7 et 8. D'où il suit que les racines négatives de x sont $-0,4$ et $-0,7$, à moins d'un dixième près.

64. Les équations en $(x'-p')$ et en $(z'_{,}-1)$ peuvent n'être pas suffisantes pour déterminer l'admission ou le rejet de la totalité des racines douteuses. Alors on a recours aux équations en $(x''-p'')$ et en $(z''_{,}-1)$, qu'on obtient

Digitized by Google

en faisant $10(x'-p')=x''$, $\frac{1}{x'-p'}=z''_{,r}$, et en procédant comme on a fait ci-dessus pour les équations en $(x'-p')$ et en $(z'_{,r}-1)$.

Par ce moyen on approche, jusqu'à la seconde décimale inclusivement, des racines dont l'existence est déjà reconnue, en même temps que l'on découvre les racines réelles jusques-là douteuses, qui étant comprises entre $\left(p+\frac{p'}{10}\right)$ et $\left(p+\frac{p'+1}{10}\right)$, n'ont point pour communes limites $\left(p+\frac{p'}{10}+\frac{p''}{100}\right)$ et $\left(p+\frac{p'}{10}+\frac{p''+1}{100}\right)$, les différences de ces racines entr'elles pouvant d'ailleurs être indéfiniment moindres que $\frac{1}{100}$.

On détruit aussi, par ce même moyen, le soupçon qui auroit été maintenu dans l'équation en $(x'-p')$ par les imaginaires $f'\pm\sqrt{-100\varphi}$, toutes les fois, pour le moins, que 10000φ n'est pas égal ou supérieur à $\frac{1}{4}$; ou, ce qui revient au même, toutes les fois qu'on n'a point $\varphi<\frac{1}{40000}$, ou bien $\varphi<0{,}000025$. Les raisonnemens sont ici les mêmes qu'aux numéros 58 et 61.

65. S'il reste encore à vérifier des racines présumées, ou si l'on veut pousser l'exactitude des racines découvertes jusqu'à la troisième décimale inclusivement, on voit comment la vérification et l'approximation se continueront par les équations en $(x''-p'')$ et en $(z''_{,r}-1)$ qu'on obtient en faisant $10(x''-p'')=\frac{x''}{10}$, et $\frac{1}{x''-p''}=z''_{,r}$.

66. En procédant de la sorte, au moyen des équations en $(x^{IV}-p^{IV})$, en $(x^{V}-p^{V})$, etc. etc., s'il y a lieu, on finit

Digitized by Google

par déterminer quelles sont, parmi les racines présumées de l'équation proposée en x, celles qui doivent être admises et celles que l'on doit exclure. Généralement, on n'est dans le cas de recourir à l'équation en $(x^{(n)}-p^{(n)})$, qu'autant qu'on veut avoir des racines exactes jusqu'à la décimale $n^{ième}$ inclusivement, ou que la proposée a des racines imaginaires dont la partie réelle n'est pas un nombre entier, et dont la partie précédée du signe — sous le signe $\surd$, est moindre que $\frac{1}{4\times 10^n}$; encore, dans la seconde circonstance, ce recours n'est-il pas toujours nécessaire.

Nous sommes donc arrivés, par notre Méthode, au but que nous nous sommes proposé, qui est de trouver exactement, jusqu'à telle décimale qu'on voudra, les seules valeurs réelles qui puissent être assignées à l'inconnue d'une équation numérique d'un degré quelconque; et nous y sommes parvenus par le seul emploi des deux premières règles de l'Arithmétique. La pratique étant la pierre de touche de la commodité des diverses méthodes, nous desirons que nos Lecteurs s'exercent à résoudre les mêmes équations numériques par la nôtre et par celles qui l'ont précédée; qu'ils résolvent, par exemple, l'équation du cinquième degré du n° 63, et celles du quatrième degré du n° 55.

Digitized by Google

NOTES.

Sur le CHAPITRE Ier.

(A) Nous avons dit, au sujet du procédé que M. Lagrange a proposé pour corriger la méthode des substitutions successives, qu'il pouvoit donner lieu, en certains cas, à des milliers, et même à un nombre indéfiniment plus grand, d'opérations superflues. Soit, par exemple, une équation du quatrième degré ayant une de ses racines entre 0 et 1; une autre racine entre 1 et 2; une troisième égale à 4, moins un demi-millionième; et, pour dernière racine, 4, plus un demi-millionième (on prend ici, pour plus grande commodité, une fraction rationnelle). Dans ce cas, la limite de la plus petite différence des racines sera moindre qu'un millionième. Donc si l'on fait $D < \frac{1}{1000000}$ dans la progression arithmétique 0, D, 2D, 3D, etc., le nombre des termes à substituer devra s'élever à plus de quatre millions; tandis que cette même équation peut se résoudre par la seule substitution des nombres 0, 1, 2, 3, 4 et 5. Cette extrême multiplicité de substitutions est donc un *luxe* infiniment onéreux; et l'on auroit, généralement, plus tôt fait d'employer successivement, pour les substitutions, au lieu de la série 0, D, 2D, 3D, etc., la série des unités simples; puis, en cas d'insuffisance, celle des dixièmes; puis encore celle des centièmes, et ainsi de suite.

Ce parti seroit préférable, lors même qu'on seroit tenu, en l'adoptant, d'opérer la substitution des nombres de chaque

série compris entre chaque terme de la série précédente et le terme suivant, c'est-à-dire, de substituer les dixièmes compris entre 0 et 1, entre 1 et 2, entre 3 et 4, et ainsi de suite sans exception, etc. A plus forte raison, ce mode de substitution doit-il être préféré lorsqu'on a trouvé le moyen de se dispenser de la plupart de ces intercalations ou substitutions intermédiaires, ainsi que cela se rencontre dans notre Méthode.

Par le même motif, dans une équation dont la plus grande racine paroîtroit susceptible de renfermer dans sa valeur des dixaines, ou des centaines, etc., on devroit employer, pour les premières substitutions, la série des dixaines, ou celle des centaines, etc. Les termes de chacune des progressions arithmétiques qu'il conviendroit d'employer successivement, peuvent être représentés d'une manière générale par 0, 10^n, 2.10^n, 3.10^n, etc.; n étant un nombre entier positif, ou zéro, ou un nombre entier négatif. On doit commencer par la substitution des termes de la progression dont la différence 10^n est la puissance de 10 immédiatement inférieure à la limite de la plus grande racine positive. Si cette limite, par exemple, étoit comprise entre cent et mille, la différence de la première progression à employer seroit 10^2. La dernière progression à laquelle on puisse être dans le cas de recourir, est celle dont la différence est la puissance de 10 immédiatement inférieure à D; mais on pourra souvent, ainsi que nous l'avons fait observer, se trouver dispensé d'en venir à cette progression, et même à plusieurs de celles dont l'emploi doit précéder le sien. L'exemple allégué au commencement de cette note en est une preuve sensible. Quoique les puissances de tout autre nombre que 10 pûssent être prises pour les différences respectives de ces progressions, ce dernier nombre doit, en général, être adopté de préférence, à cause de la facilité des calculs, qui résulte de ce qu'il est la base du système de numération usité.

Si les quatre premières racines d'une équation proposée, du sixième degré, étoient des imaginaires dont la partie réelle fût un

nombre entier positif moindre que 3, les deux dernières racines restant les mêmes que ci-dessus, c'est-à-dire, $4 - \frac{1}{1000000}$ et $4 + \frac{1}{1000000}$; alors les quatre millions, et plus, de substitutions à opérer, seroient rigoureusement nécessaires pour la résolution de l'équation, selon la méthode de M. Lagrange; et cette dure nécessité est encore un inconvénient extrêmement grave. Pour résoudre une semblable équation, à moins d'une unité près, suivant la nouvelle méthode, il ne faut que quelques minutes.

(B) En parlant du fameux théorême de Descartes, l'illustre Auteur du Traité de la Résolution des Equations numériques y rappelle que les Anglois attribuent cette règle à leur compatriote Harriot. Il est vrai que Desoartes, de son vivant même, fut accusé, par les Anglois, de cette espèce de plagiat, comme ils ont formé depuis une semblable imputation contre Leibnitz. Mais en rappelant cette accusation surannée, qui n'a point empêché que le théorême dont il s'agit n'ait été constamment appelé *la Règle de Descartes*, il est juste aussi d'observer qu'elle a été detruite par plusieurs Auteurs du dix-septième siècle. Le P. Prestet, dans ses Elémens imprimés en 1689, provoque, à ce sujet, la comparaison des écrits d'Harriot avec ceux de Descartes. « Lorsque M. Wallis, dit-il, un peu trop » jaloux de la gloire que la France s'est acquise dans les » Mathémathiques, vient renouveler cette accusation ridicule, » on est en droit de ne le point croire, puisqu'il parle sans » preuves. M. Hudde, hollandois, qui n'est point suspect, puis- » qu'il n'avoit aucun intérêt à soutenir l'honneur des auteurs » françois, est bien plus équitable dans le jugement qu'il porte » de M. Descartes ».

Sur le CHAPITRE II.

(C) Les deux propositions, dont dépend l'Algorithme du chapitre second, nous avoient paru nouvelles. Mais nous ne devons pas taire que M. Legendre, dans son rapport sur une partie de notre travail, en a jugé autrement. Suivant lui, « ces » deux théorêmes que l'Auteur regarde comme nouveaux, ne » sont que *l'énoncé de propriétés déjà connues*, relatives à » la sommation des suites, et ce qui lui appartient se réduit » à l'Algorithme propre à opérer les transformations ».

Si l'on considère que le second de ces théorêmes et l'Algorithme ne sont qu'une seule et même chose, on aura sans doute quelque peine à comprendre que l'un appartienne à l'Auteur, si l'autre ne lui appartient pas. Peut-être le Rapporteur se seroit-il exprimé avec plus de justesse et de *justice*, s'il eût dit que ces deux propositions, jusqu'ici inconnues, sont des conséquences si faciles à déduire des principes déjà recus, qu'il peut paroître étonnant qu'on ne s'en soit pas avisé plus tôt. Peut-être, du moins, auroit-il mieux valu que M. Legendre, en niant la nouveauté de ces propositions, ne se fût pas borné à cette simple négation, et qu'il eût bien voulu indiquer en quel ouvrage, élémentaire ou non, elles se trouvent consignées. Quoi qu'il en soit, d'après l'imposante autorité du savant Rapporteur, on conçoit qu'il est inutile de s'arrêter ici à prouver *des propriétés connues*.

(D) L'Algorithme indiqué au n° 26, pourroit être employé à la recherche directe des racines négatives; mais il nous a paru plus simple et plus commode de ramener cette recherche, comme on a coutume de faire, à celle des racines positives et d'employer, à cet effet, notre Algorithme ordinaire.

Digitized by Google

(E) L'Algorithme du second chapitre, en perdant un peu de sa simplicité, peut s'étendre au calcul de la transformée en $\left(x-\frac{n}{d}\right)$, d n'étant plus seulement une puissance de 10, mais un nombre entier quelconque. Il faut, pour cela, faire $x=\frac{x'}{d}$, et, pour avoir les coefficiens de l'équation en x', multiplier respectivement ceux de l'équation en x, à compter de celui de x^m, par d^0, d^1, d^2,... d^m. Ensuite, par de simples additions et soustractions, on se procure [n°s 22, 24, 25] la transformée en $x'-n$, dont les coefficiens, à compter de celui de la plus haute puissance, respectivement divisés par d^0, d^1, d^2,... d^m, deviennent ceux de l'équation en $\left(x-\frac{n}{d}\right)$. Par ce procédé, le nombre des multiplications et divisions est diminué, autant qu'il se peut.

Digitized by Google

Sur le CHAPITRE III.

(F) On a vu [n° 35] comment on peut déterminer une limite, en moins, de la plus petite valeur positive, et une limite, en plus, de la plus grande valeur que puisse avoir l'inconnue d'une équation. Mais il est une remarque qui n'a pas encore été faite, c'est qu'on peut déterminer deux limites semblables pour les valeurs réelles qu'une équation peut avoir entre zéro et un; et voici comment.

Pour obtenir une limite moindre que la plus petite racine, on use du même procédé qu'au n° 55; c'est-à-dire, on prend le quotient du dernier terme divisé par la somme de ce même terme et du plus grand coefficient précédé d'un signe contraire : ce quotient donne nécessairement une fraction pour limite de la plus petite racine positive.

La limite de la plus grande racine qui puisse être comprise entre zéro et un, se découvre à l'aide de la transformée en $(x-1)$, après qu'on a changé les signes de ses coefficiens de rang pair : le plus grand coefficient de cette équation, ainsi modifiée, de signe contraire à celui de son dernier terme, étant divisé par la somme de ce coefficient et du dernier terme, le quotient est une fraction dont la valeur surpasse celle de la plus grande racine que la proposée en x puisse avoir entre 0 et 1. Cette fraction est le complément, à l'unité, de celle qui exprime la limite de la racine la plus voisine de zéro, que l'équation en $(x-1)$ puisse avoir entre 0 et -1. Avec un peu de réflexion, on apperçoit aisément la raison de ceci.

On jugera, par la suite de ces Notes, de quelle importance peut être cette remarque.

Sur le CHAPITRE IV.

(G) PARMI les cas susceptibles d'être résolus par la première partie de la nouvelle Méthode, on a compté celui où la proposée n'a ni racines imaginaires, ni plusieurs racines réelles comprises entre deux nombres entiers p et $p+1$. Il peut néanmoins se présenter alors une difficulté, provenant de la présence des racines commensurables dans l'équation : en voici un exemple avec le moyen d'y obvier. Soit l'équation...

$$x^3+x^2-3x+1=0;$$

on a les coefficiens des équations....

en x.....1 + 1 — 3 + 1
en $(x-1)$.....1 + 4 + 2 + 0.

Dans cette circonstance où la proposée a l'unité pour racine, il se pourroit qu'il y eût une autre racine entre zéro et un, dont l'existence ne seroit point manifestée par le dernier terme. Si cette racine existe en effet, on s'en assurera en prenant la somme des trois premiers termes de la proposée $1+1-3$, laquelle somme égalant -1, est de signe contraire au troisième terme $+2$, de la transformée en $(x-1)$, et par conséquent, atteste l'existence d'une racine entre 0 et 1.

La raison de ceci est que, dans ce cas, l'équation du deuxième degré qui résulte de la division de la proposée par $x-1$, a pour ses coefficiens respectifs les sommes-premières des coefficiens de la proposée, à commencer du premier jusqu'au troisième. Ces sommes étant 1, 2, — 1, l'équation du second degré est....

$$x^2+2x-1=0,$$

dont la transformée en $(x-1)$ est....

$$(x-1)^2+4(x-1)+2=0.$$

Cette opération seroit inutile, si l'on savait d'avance que la proposée n'a point de racines imaginaires, la simple comparaison des signes de cette équation avec ceux de sa transformée étant alors suffisante pour manifester l'existence de la racine entre et 1.

Quoique l'exemple employé dans cette note, soit celui d'une équation en x du troisième degré, dont la transformée en $(x-1)$ n'a que son dernier terme égal à zéro, le procédé est général. La proposée étant du degré m, et sa transformée en $(x-1)$ ayant ses n derniers termes égaux, chacun, à zéro, il faut alors prendre la somme des $m+1-n$ premiers coefficiens de l'équation proposée; cette somme est la valeur du dernier terme de l'équation en x du degré $(m-n)$, qui est le même degré auquel la transformée en $(x-1)$ se trouve abaissée par l'égalité à zéro de ses n derniers termes.

(H) Nous n'aurions peut-être pas dû faire mention, au n° 48, de l'objection opposée à la nouvelle Méthode; mais nous savons que cette objection a été faite dans les propres termes que nous avons rapportés; et dès lors il a bien fallu en montrer la frivolité. Quelles sont d'ailleurs ces Méthodes ordinaires qu'on puisse dire *plus expéditives*, et en même temps *aussi sûres*, *aussi générales* que la nôtre?

Digitized by Google

Sur le CHAPITRE V.

(I) OUTRE le *criterium* que nous avons fait connoître [n° 53], il en existe plusieurs autres qui, sans avoir tous les avantages du premier, peuvent souvent en tenir lieu. Un second *criterium* consiste dans ce corollaire aussi important par son utilité que facile à déduire de la remarque que nous avons consignée dans la note (F) :

Une équation n'a point de racine entre zéro et un, lorsque la limite, en moins, de sa plus petite racine, est égale ou supérieure à la limite, en plus, de la plus grande racine qu'elle puisse avoir entre 0 *et* 1.

Soit, pour exemple, la même équation du n° 53...

$$x^3 - 4x^2 + 3x - 6 = 0.$$

Coefficiens des équations....

en x.....1 — 4 + 3 — 6

en $(x-1)$.....1 — 1 — 2 — 6.

Ici la plus petite valeur que x puisse avoir entre 0 et 1, doit être supérieure à $\frac{6}{9}$ ou $\frac{2}{3}$; et la plus grande doit être au-dessous de $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{4}$; la contradiction qui se rencontre entre ces deux conditions fait voir l'impossibilité qu'il y ait des valeurs positives de x au-dessous de l'unité.

(K) A l'aide du *criterium* que nous avons indiqué dans la note précédente, on peut souvent résoudre une équation numérique, sans avoir besoin de recourir aux transformées collatérales.

Digitized by Google

Prenons pour exemple la même équation....

$$x^3 - 4x^2 + 3x - 6 = 0.$$

Coefficiens des équations....

en x. .....1 — 4 + 3 — 6
en $(x-1)$....1 — 1 — 2 — 6
en $(x-2)$....1 + 2 — 1 — 8
en $(x-3)$....1 + 5 + 6 — 6
en $(x-4)$....1 + 8 + 19 + 6.

On a déjà vu que x ne peut avoir de valeur entre 0 et 1.

La plus petite racine de l'équation en $(x-1)$ doit surpasser $\frac{6}{7}$, et la plus grande racine positive, inférieure à 1, que cette équation puisse avoir, doit être au-dessous de $\frac{5}{10}$ ou $\frac{1}{2}$. La contradiction est évidente. Donc l'équation en $(x-1)$ n'a point de racine positive entre 0 et 1; et par conséquent, celle en x n'en a point entre 1 et 2.

De même, les fractions qu'on voudroit admettre comme racines de l'équation en $(x-2)$, devroient être en même temps au-dessus de $\frac{8}{10}$ ou $\frac{4}{5}$, et au-dessous de $\frac{5}{11}$, conditions incompatibles. Donc l'équation en $(x-2)$ n'a pas de racine entre 0 et 1; et par conséquent celle en x n'en a point entre 2 et 3.

L'équation en $(x-3)$ n'a qu'une racine positive qui est manifestée entre 0 et 1; par conséquent x a nne valeur positive entre 3 et 4. Et la proposée n'a pas d'autre racine réelle, vu que n'ayant point de permanence de signe, elle n'a point de racine négative, et que l'absence des variations de signe dans la transformée en $(x-4)$ établit le nombre 4 pour limite de la plus grande racine positive de la proposée.

(L) Un troisième *criterium* s'offre encore à nous : *Une équation n'a point de racine entre zéro et un, lorsque la suite formée par les sommes-premières de ses coefficiens pris à rebours, ne présente point de variation de signe.* Cette proposition est une conséquence de notre Algorithme [n° 20]; car

il est évident que l'absence des variations de signe dans cette suite, entraîne cette même absence dans la transformée collatérale.

Ainsi dans la même équation qui vient de nous servir d'exemple, les coefficiens pris à rebours étant....

$$-6+3-4+1,$$

les sommes-premières sont...$-6-3-7-6$;

d'où il suit que l'équation en x n'a point de racine entre 0 et 1.

Ce *criterium* s'applique pareillement aux deux transformées de cette équation en $(x-1)$ et en $(x-2)$. L'opération qu'il exige peut souvent se faire mentalement, et même d'un coup-d'œil, comme cela se trouve dans le cas pris pour exemple; ce qui rend ce *criterium* très-commode.

(M) Il est encore d'autres circonstances où l'on peut se dispenser de calculer les transformées collatérales.

Lorsque les transformées successives en $(x-1)$, $(x-2)$, etc. ont fait découvrir autant de racines positives que la proposée a de variations de signe, on voit que les collatérales en $(z-1)$, (z_1-1), (z_2-1), etc. deviennent inutiles. C'est donc surabondamment que ces dernières ont été employées au n° 54, dans la recherche des racines positives de l'équation..... $x^3-2x-5=0$; et au n° 55, dans celle des racines négatives de l'équation $x^4-5x^3+5x^2+6x-12=0$.

Dans la première équation de ce même n° 55, la seule règle de Descartes rendoit inutiles toutes les transformées collatérales, à l'exception de celle en (z_2-1). Il suffit, pour s'en convaincre, de jeter les yeux sur les signes des coefficiens de cette équation et de ses transformées successives. On en peut dire autant par rapport à l'équation en x du n° 62, et à ses transformées successives. En général, il ne faut point perdre de vue cette règle de Descartes, dont les applications se présentent fréquemment dans la nouvelle Méthode.

Digitized by Google

Lorsqu'on est parvenu à découvrir $m-2$ racines réelles d'une équation du degré m, on ne peut supposer que les deux restantes aient des valeurs réelles comprises entre deux nombres entiers p et $p+1$, si l'équation en $(x-p-1)$ n'a pas au moins deux permanences de signe de plus que celle en $(x-p)$. Ainsi dans l'équation du n° 46, $x^3-7x+7=0$, lors même qu'on ignoreroit que toutes ses racines sont réelles, la seule vue des transformées successives apprendroit qu'il ne faut chercher les deux racines positives de la proposée qu'entre 1 et 2.

(N) Le *criterium* qui est indiqué au n° 53, et que l'on doit considérer comme le plus important, peut être généralisé ainsi : *une équation en* x *ne peut avoir plus de racines comprises entre zéro et* u, *qu'il n'y a de variations de signe dans l'équation en* $\left(z-\frac{1}{u}\right)$; u *représentant une valeur positive quelconque, et* z *égalant* $\frac{1}{x}$.

Sur quoi, il faut observer qu'en faisant $z'=uz$, on a les mêmes variations de signe dans l'équation en $(z'-1)$ ou $\left(\frac{u}{x}-1\right)$ que dans celle en $\left(z-\frac{1}{u}\right)$ ou $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{u}\right)$; ensorte qu'il suffit, sous ce rapport, d'obtenir la première.

Ainsi la proposée en x n'aura point de racine entre zéro et u, lorsque la transformée en $(z'-1)$ ou $\left(\frac{u}{x}-1\right)$ n'aura que des permanences de signe.

Cette uniformité des signes de la transformée aura constamment lieu, lorsqu'il n'y a aucune valeur de x entre o et u, si ce n'est quand la proposée a une ou plusieurs couples de racines imaginaires de la forme $f\pm\sqrt{-\varphi}$, f ayant une valeur positive moindre que celle de u, et φ étant moindre que $f(u-f)$, et par conséquent moindre que $\frac{u^2}{4}$. Ce cas d'exception est le seul qui puisse produire quelque variation de

signe dans la transformée en $(z'-1)$; encore n'en est-ce pas un effet nécessaire.

Dans ce cas, si $u=1$, f est une fraction, et φ est $<\frac{1}{4}$.

Si $u=10$, f est entre 0 et 10, et φ est $<\frac{10^2}{4}$ ou 25.

Si $u=100$, f est entre 0 et 100, et φ est $<\frac{100^2}{4}$ ou 2500.

Et généralement, si $u=10^n$, f est entre 0 et 10^n, et φ est $<\frac{10^{2n}}{4}$ ou $25.10^{n(n-1)}$. Ceci a également lieu lorsque l'exposant n est négatif.

Ces résultats se lient avec ceux des n°s 57, 61, 64; et ce *criterium*, ainsi généralisé, se démontre d'une manière analogue à celle du n° 57 : z' ou $\frac{u}{x}$ est ici $\frac{u}{f\pm\sqrt{-\varphi}}$ ou $\frac{uf\mp\sqrt{-u^2\varphi}}{f^2+\varphi}$; ainsi la partie réelle de $z'-1$ est $\frac{f(u-f)-\varphi}{f^2+\varphi}$; quantité qui ne peut être >0 qu'autant que le nombre f est positif et plus petit que u, et que φ est $<f(u-f)$.

(O) Appliquons ceci à l'équation....

$$x^4-12x^3+58x^2-132x+121=0;$$

Cette équation est la même qui a été résolue au n° 55, à l'aide de ses transformées successives en $(x-1)$, etc., et des transformées collatérales en $(z-1)$, (z_1-1), etc. Il est aisé de reconnoître [55] que ses racines positives, si elle en a, sont moindres que 3.

Les coefficiens de l'équation inverse en z ou $\frac{1}{x}$ étant...

$$121-132+58-12+1;$$

ceux de l'équation en $z'=3z$ sont...

$$121-3.132+3^2.58-3^3.12+3^4;$$

ou bien $121-396+522-324+81$.

Les coefficiens de l'équation en $(z'-1)$, calculés par l'Algorithme, sont.....

$$121+88+60+16+4.$$

Donc la proposée n'a point de racine positive moindre que 3; et comme elle n'en peut avoir qui soit égale ou supérieure à ce nombre, et que l'absence des permanences en exclut toute racine négative, il s'ensuit que l'équation en x n'a point de racines réelles.

L'application de ce *criterium* n'a pas le même résultat dans l'équation suivante....

$$x^3-2,1x^2+0,41x+0,855=0,$$

équation dont la plus grande racine positive, s'il y en a, est <4.

Les coefficiens de l'équation en $z'=4z=\frac{4}{x}$, sont....

$$0,855+4\times 0,41-16\times 2,1+64,$$

ou bien... $0,855+1,64-33,6+64.$

Ceux de l'équation en $(z'-1)$ sont....

$$0,855+4,205-27,755+32,895.$$

Donc la proposée en x a, soit une couple de racines positives, soit une couple de racines imaginaires dont la partie réelle est entre 0 et 4, et dont la partie précédée du signe — sous le signe $\surd$ est $<\frac{4^2}{4}$ ou <4.

Si l'on fait attention que les coefficiens de cette proposée sont les mêmes que ceux de la transformée en $(x-1)$ du n° 62, on appercevra aisément que c'est un cas d'exception semblable à celui que présente l'équation en x résolue dans ce numéro.

(P) Le problème de la résolution des équations numériques étant réduit par la nouvelle méthode à la recherche des racines d'une équation comprises entre zéro et un, il est avantageux de multiplier les moyens de reconnoître l'absence de toute racine réelle entre ces deux limites : en voici donc un quatrième.

On prendra la somme des coefficiens de signe contraire à celui du dernier terme; si elle n'est pas plus grande que ce terme, on en conclura évidemment que l'équation n'a pour racine aucune valeur entre o et 1.

Ce moyen si simple, appliqué successivement aux diverses transformées, suffit quelquefois à la résolution d'une équation. Reprenons l'exemple déjà employé....

$$x^3 - 4x^2 + 3x - 6 = 0$$

Coefficiens des équations....

en x.....1 — 4 + 3 — 6
en $(x-1)$...1 — 1 — 2 — 6
en $(x-2)$...1 + 2 — 1 — 8
en $(x-3)$...1 + 5 + 6 — 6
en $(x-4)$...1 + 8 + 19 + 6

Au premier coup-d'œil jeté sur les coefficiens, on reconnoît à l'aide de ce quatrième *criterium*, que la proposée n'a point de racine réelle entre o et 3; et par la règle de Descartes, on voit que la proposée n'a qu'une racine réelle, comprise entre 3 et 4. Cette seule règle, d'ailleurs, suffisoit pour indiquer l'absence de toute racine réelle entre 1 et 3.

(Q) Si l'essai du moyen précédent n'a pas suffi, on peut aussi prendre la limite, en plus, des valeurs positives que l'équation peut avoir pour racines entre o et 1, en la manière indiquée par la note (F), substituer cette limite à la place de l'inconnue dans les termes de signe contraire à celui du dernier terme, et prendre la somme des termes où la substitution a été faite. Pour que l'inconnue puisse avoir quelque valeur entre o et 1, il faut évidemment que cette somme surpasse la valeur du dernier terme. Ce moyen est d'une application assez facile, quand la limite dont il s'agit est une fraction dont les deux termes n'ont, chacun, qu'un seul chiffre; et il est souvent aisé de s'en procurer une semblable.

Digitized by Google

(R) Si l'on fait $-(x-1)=\xi$, et par conséquent $-x=\xi-1$, après le changement des signes des termes de rang pair dans les équations en $(x-1)$ et en x, on aura deux équations en ξ et $(\xi-1)$, auxquelles on pourra appliquer les mêmes moyens indiqués dans les notes précédentes, pour manifester l'absence des racines réelles entre zéro et un dans l'équation en ξ, et par conséquent dans celle en x.

(S) Ces divers moyens tendant à diminuer beaucoup le nombre des opérations, ne doivent pas être négligés dans l'usage de la nouvelle Méthode. Néanmoins il pourra paroître convenable de ne point embarrasser les commençans par trop de détails, et de les exercer d'abord à résoudre les équations par les seuls procédés indiqués dans le corps de l'ouvrage.

(T) Un *criterium* d'une plus grande importance est celui qui résultera de la seconde proposition du n° 39, si on l'admet en principe général pour une équation quelconque. « Il arrive » quelquefois dans ces matières, dit Fontenelle, que l'on trouve » de bonnes méthodes, et qu'il n'est pas aisé d'en trouver une » démonstration assez précise ou assez claire. On voit la route » qu'il faut tenir, on voit que l'on arrivera, on arrive tou- » jours; mais à toute rigueur, on pourroit douter, et on ne » forceroit pas un incrédule, triomphe indispensable pour les » Mathématiques ». Et cependant la règle même de Descartes, la théorie des parallèles, et plusieurs autres vérités mathématiques, ont été généralement admises long-temps avant qu'elles aient été rigoureusement démontrées.

Sur le CHAPITRE VI.

(U) D'APRÈS les équations.....

$10(x-p)=x'$, $10(x'-p')=x''$,.....$10(x^{(n-1)}-p^{(n-1)})=x^{(n)}$,

on reconnoît aisément que

$$x^{(n)}-p^{(n)}=10^n\left(x-p-\frac{p'}{10}-\frac{p''}{100}-.....-\frac{p^{(n)}}{10^n}\right).$$

Il est donc facile de passer, respectivement, des équations en $(x'-p')$, $(x''-p'')$, $(x'''-p''')$, etc. aux équations en $\left(x-p-\frac{p'}{10}\right)$, $\left(x-p-\frac{p'}{10}-\frac{p''}{100}\right)$, $\left(x-p-\frac{p'}{10}-\frac{p''}{100}-\frac{p'''}{1000}\right)$, etc.

Généralement, les coefficiens de l'équation en $(x^{(n)}-p^{(n)})$ du degré m, divisés respectivement, à compter de celui de la plus haute puissance, par $(10^n)^0$, $(10^n)^1$,.....$(10^n)^m$, deviennent les coefficiens de l'équation en $\left(x-p-\frac{p'}{10}-.....-\frac{p^{(n)}}{10^n}\right)$.

Ainsi le terme tout connu de cette dernière équation est égal au terme tout connu de celle en $(x^{(n)}-p^{(n)})$, divisé par 10^m. Par conséquent, le dernier terme d'une transformée en $(x^{(n)}-p^{(n)})$, divisé par 10^m, est égal au résultat que donne le nombre $\left(p+\frac{p'}{10}+....+\frac{p^n}{10^n}\right)$ substitué à x dans l'équation proposée.

(a) Il résulte de ce qui précède que les transformées en $(x-p)$, $(x'-p')$, etc., sans autre opération ultérieure de calcul que le placement convenable de la virgule indicative des décimales, donnent arithmétiquement les valeurs de l'ordonnée y, correspondant aux valeurs entières et décimales de

l'abscisse x, dans la courbe qui a pour équation.....

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots\ldots A_{m-1}x' + A_mx^0 = y.$$

On ne s'arrêtera point ici à montrer comment la considération de ces valeurs numériques de y peuvent contribuer à la résolution d'une équation numérique.

(b) Une autre conséquence est que les coefficiens de l'équation en $(x^{(n)} - 10)$, respectivement divisés par 10^0, 10^1, 10^2,... 10^m, deviennent ceux de l'équation en $(x^{(n-1)} - p^{(n-1)} - 1)$; c'est-à-dire, l'équation en $(x' - 10)$, ainsi modifiée, devient celle en $(x - p - 1)$; l'équation en $(x'' - 10)$ devient pareillement celle en $(x' - p' - 1)$, et ainsi de suite. Cela se prouve généralement par l'équation $10(x^{(n-1)} - p^{(n-1)}) = x^{(n)}$; d'où..... $x^{(n)} - 10 = 10(x^{(n-1)} - p^{(n-1)} - 1)$.

Or cette conséquence mérite quelque attention, en ce qu'elle fournit au calculateur un *contrôle*, ou, comme on s'exprime en Arithmétique, une *preuve* de la justesse des calculs relatifs aux transformées successives. Et par cette raison, lorsqu'on attache quelque importance à éviter les erreurs, et que les mêmes opérations ne se font point concurremment par deux calculateurs qui se servent mutuellement de contrôle, il convient de continuer les transformations jusqu'à celle en $(x^{(n)} - 10)$, quoique, sans ce motif, on fût souvent dans le cas de s'arrêter plus tôt.

Prenons pour exemple l'équation du cinquième degré du n° 63. On a pour les coefficiens de ses transformées....

en $(x-2)$....1 + 7 + 13 − 3 − 16 + 6.
en $(x-3)$....1 + 12 + 51 + 88 + 50 + 8.

On s'est trouvé dans le cas de faire $10(x-2) = x'$, et de calculer les équations en $(x'-1)$, $(x'-2)$, etc., jusqu'à celle en $(x'-8)$; mais pour s'assurer qu'il n'y a point d'erreur de calcul dans ces transformations, il faut les continuer jusqu'à l'équation en $(x'-10)$.

Digitized by Google

Coefficiens des transformées.....

en $(x'-8)$....1+110+4180+60200+205440+113088
en $(x'-9)$....1+115+4630+73410+338825+383019
en $(x'-10)$....1+120+5100+88000+500000+800000.

Les coefficiens de la transformée en $(x'-10)$ respectivement divisés par 10^0, 10^1, 10^2,.... 10^5, deviennent

$$1+12+51+88+50+8;$$

ils se réduisent, comme cela devoit être, à ceux de la transformée en $(x-3)$.

(V). On a vu, dans le Chapitre VI, comment une même méthode nous sert à approcher davantage d'une racine déjà manifestée, à moins d'une unité près entière ou décimale, et à opérer simultanément la vérification et l'approximation des racines qui restent encore à déterminer. Cette unité de méthode a été prescrite par la nature même de la chose, dans le dernier cas; et il a paru convenable de la conserver dans le premier, autant pour ne pas déroger à la simplicité des moyens, que pour ne point multiplier les méthodes sans nécessité, et pour conserver dans tous les calculs l'espèce de *preuve* ou de *contrôle* mentionné dans la note précédente.

Voici néanmoins un nouveau procédé d'approximation que nous proposons pour le premier cas, c'est-à-dire pour celui où, à l'aide de deux transformées successives en $(\xi-\pi)$ et $(\xi-\pi-1)$, et en cas de besoin, de la collatérale en $(\zeta_\pi-1)$, on a reconnu l'existence d'une seule racine comprise entre o et 1, pour l'équation en $(\xi-\pi)$, et par conséquent d'une seule comprise entre π et $\pi+1$, pour l'équation en ξ.

(a) Soit $\xi=\pi+\xi_1$, ou $\xi-\pi=\xi_1$; soient respectivement π_1 et Π_1 les limites, en moins et en plus, de la valeur de ξ_1 comprise entre o et 1, déterminées conformément à ce qui a été

dit plus haut [note (F)]. On peut prendre, ou π_1, ou Π_1 pour deuxième valeur approchée de ξ_1, les premières étant zéro et un ; et par conséquent $\pi+\pi_1$, ou $\pi+\Pi_1$, pour deuxième valeur approchée de ξ.

Supposons d'abord qu'on veuille approcher de la racine par des valeurs de plus en plus convergentes, qui soient toujours inférieures à la valeur exacte.

On fera $\xi_1=\pi_1+\xi_2$, ou $\xi_1-\pi_1=\xi_2$; on passera de l'équation en ξ_1 à celle en ξ_2 [*voyez* la note (E)], et l'on déterminera la limite, en moins, de la valeur de ξ_2 comprise entre o et 1. Cette limite étant représentée par π_2, la troisième valeur approchée de ξ sera $\pi+\pi_1+\pi_2$.

On se procurera ainsi successivement les équations en $\xi_3, \xi_4, \ldots \xi_\nu$; et l'on aura $\pi+\pi_1+\pi_2+\ldots+\pi_\nu$ pour la $(\nu+1)^{ième}$ valeur approchée de ξ.

Supposons maintenant qu'on veuille approcher de la racine par des valeurs de plus en plus convergentes, mais toujours supérieures à la valeur exacte de ξ.

On passera de l'équation en ξ_1 à celle en $(\xi_1-\Pi_1)$; puis faisant $\xi_1=\Pi_1-\Xi$, ou $\Xi=-(\xi_1-\Pi_1)$, on obtiendra l'équation en Ξ, en changeant les signes des termes de rang pair dans l'équation en $(\xi_1-\Pi_1)$. Il ne restera plus qu'à obtenir des valeurs de plus en plus convergentes, mais toujours inférieures à Ξ ; de sorte que la valeur de plus en plus approchée de $(\Pi_1-\Xi)$ ou ξ_1, et par conséquent celle de ξ ou $\pi+\xi_1$, demeureront toujours plus grandes que la valeur exacte. Ces approximations vers la valeur de Ξ se feront de la même manière que dans la première supposition.

(b) Prenons pour exemple cette équation que nous avons déjà résolue [54], à moins d'une unité près....

$$x^3-2x-5=0.$$

Digitized by Google

On a trouvé pour les coefficiens de ses transformées....

$$\text{en } (x-2)\ldots. 1+6+10-1$$
$$\text{en } (x-3)\ldots. 1+9+25+16.$$

Il résulte de ces transformées que l'équation en $(x-2)$ a une racine comprise entre o et 1, dont les premières valeurs approchées, l'une en moins, l'autre en plus, sont, respectivement, o et 1. Mais, en outre, ces deux transformées fournissent immédiatement les secondes valeurs approchées de cette racine, qui sont $\frac{1}{1+10}$ ou $\frac{1}{11}$ pour la valeur en moins, et $\frac{25}{25+16}$ ou $\frac{25}{41}$ pour la valeur en plus. [*Voyez* la note (F).]

On voit donc, en se bornant aux valeurs approchées en moins, que les deux premières sont, pour la proposée....

$$2 \text{ et } 2+\tfrac{1}{11}, \text{ ou } \tfrac{23}{11}; \text{ ou bien } 2{,}090909090\ldots.$$

On reconnoîtra ci-après que cette dernière valeur est exacte dans ses deux premières décimales.

Il faut maintenant, en faisant $x-2=\xi_1$, passer de l'équation en ξ_1 à celle en ξ_2 ou $\left(\xi_1-\frac{1}{11}\right)$. On peut employer à cet effet l'Algorithme modifié [note (E)], de la manière suivante.

Soit $11\xi_1=\xi'_1$: on a pour les coefficiens des équations....

$$\text{en } \xi'_1\ldots\ldots\ldots 1+6.11+10.11^2-1.11^3$$
$$\text{ou}\ldots\ldots\ldots\ldots 1+66\ +1210\ -1331$$
$$\text{en } (\xi'_1-1)\ldots. 1+69\ +1345\ -54.$$

Substituant à ξ'_1-1 sa valeur $11\xi_1-1$, ou $11\left(\xi_1-\frac{1}{11}\right)$, et faisant $\xi_1-\frac{1}{11}=\xi_2$, on a pour les coefficiens de l'équation....

$$\text{en } \xi_2\ldots. 11^3\ +69.11^2+1345.11-54.$$
$$\text{ou}\ldots\ldots 1331+8349\ +14795\ -54.$$

La limite, en moins, de ξ_2 est $\frac{54}{54+14795}$ ou $\frac{54}{14849} = \frac{1}{274+\frac{53}{54}}$; limite à laquelle on peut substituer, pour plus de simplicité, $\frac{1}{275} = \frac{1}{11.25} = 0{,}00363636\ldots\ldots$

Ainsi la troisième valeur approchée de x est...

$$2+\frac{1}{11}+\frac{1}{11.25}, \text{ ou } \frac{576}{275}; \text{ ou bien } 2{,}0945454545\ldots.$$

Nous ferons voir que cette valeur est exacte jusqu'à la quatrième décimale inclusivement.

On passe ensuite, de la même manière, de l'équation en ξ_2 à celle en ξ_3 ou $\left(\xi_2-\frac{1}{11.25}\right)$. Faisant $11.25\xi_2=\xi'_2$, et substituant dans l'équation en ξ_2, on a pour les coefficiens des équations...

en ξ'_2.....$1+69.25+1545.25^2-54.25^3$

ou.....$1+1725+840625-843750$

en (ξ'_2-1)....$1+1728+844078-1399$.

Substituant à ξ'_2-1 sa valeur $11.25\xi_2-1$, ou $11.25\left(\xi_2-\frac{1}{11.25}\right)$, et faisant $\xi_2-\frac{1}{11.25}=\xi_3$, on a pour les coefficiens de l'équation.....

en ξ_3.... $11^3.25^3+1728.11^2.25^2+844078.11.25-1399$,

ou..... $20796875+13763750+232121450-1399$.

La limite, en moins, de ξ_3 est....

$$\frac{1399}{1399+232121450}, \text{ ou } \frac{1399}{232122849}; \text{ ou bien } \frac{1}{165920\frac{769}{1399}}$$

Mais on peut, pour simplifier, lui substituer....

$$\frac{1}{165925} = \frac{1}{25.6637}.$$

Ainsi la quatrième valeur de x, approchée en moins, est....

$$2+\frac{1}{11}+\frac{1}{275}+\frac{1}{165925},$$

ou.....2,094545454545...+0,000006026819...,

ou bien....2,094551481364....,

et cette dernière valeur est exacte jusqu'à la neuvième décimale inclusivement, comme on le verra plus bas.

(c) Les valeurs approchées de cette même racine, calculées par Newton, suivant le procédé qui lui appartient, sont....

2....2,1....2,0946....2,09455147....

M. Lagrange a aussi calculé, suivant son procédé, les valeurs approchées de cette racine, en fractions continues, alternativement plus petites et plus grandes que x. Les résultats sont....

$$\frac{2}{1},\ \frac{21}{10},\ \frac{23}{11},\ \frac{44}{21},\ \frac{111}{53},\ \frac{155}{74},\ \frac{576}{275},\ \frac{731}{349},\ \frac{1307}{624},\ \frac{16415}{7837},\ \text{etc.}$$

La dixième de ces valeurs, $\frac{16415}{7837}$, qui est approchée en plus, étant réduite en décimales, devient 2,094551486$\overline{5}$.

Les valeurs approchées en moins, trouvées suivant le nouveau procédé que nous indiquons dans cette note, étant....

$$2...2+\frac{1}{11}\text{ ou }\frac{23}{11}...2+\frac{1}{11}+\frac{1}{275}\text{ ou }\frac{576}{275}...2+\frac{1}{11}+\frac{1}{275}+\frac{1}{165925},$$

ou bien 2,09090909.....2,09454545.....2,094551481364...,

on voit que ce procédé a donné des résultats un peu plus exacts que celui de Newton, et qu'il les a donnés plus promptement qu'on ne les obtient par le procédé de M. Lagrange.

En outre, ce procédé est général et sûr, et la méthode de Newton n'a pas ces avantages. « En général, l'usage de cette » méthode n'est sûr, dit M. Lagrange, que lorsque la valeur » approchée est à la fois ou plus grande ou plus petite que

» chacune des racines réelles de l'équation, et que chacune des » parties réelles des racines imaginaires; et par conséquent, cette » méthode ne peut être employée sans scrupule que pour trouver » la plus grande ou la plus petite racine d'une équation qui » n'a que des racines réelles ou qui en a d'imaginaires, mais » dont les parties réelles sont moindres que la plus grande » racine réelle, ou plus grande que la plus petite de ces » racines..... en regardant, comme on le doit, les quan- » tités négatives comme plus petites que les positives, et les » plus grandes négatives comme plus petites que les moins » grandes. (*De la Résolution des Equations numériques*, » *page* 141.) »

Si l'on emploie, au lieu du procédé de Newton, la méthode d'approximation tirée des séries récurrentes, on trouve, pour les valeurs approchées de x, dans l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$....

2,089....2,09467....2,094549....2,0945515...etc.

On ne pourroit, ainsi que l'a prouvé M. Lagrange, employer généralement cette méthode d'approximation pour chacune des racines réelles d'une équation quelconque, qu'autant que l'on connoîtroit d'avance une valeur approchée de cette racine, telle que la différence entre cette valeur et la vraie valeur de la racine fût moindre en quantité, c'est-à-dire, abstraction faite des signes, que la différence entre la même valeur et chacune des autres racines, et en même temps moindre que la racine quarrée de chacun des produits des racines imaginaires correspondantes, s'il y en a, diminuées de la même valeur. Autrement, cette méthode ne sert qu'à trouver la plus grande et la plus petite des racines réelles; encore faut-il que le quarré de la plus grande ou de la plus petite racine cherchée soit en même temps plus petit que chacun des produits réels des racines imaginaires correspondantes, et qu'on ait quelque moyen de s'en assurer. [*De la Résolution* etc., pag. 147, 151].

(d) Nous avons indiqué plus haut comment on pourroit se procurer une suite de valeurs approchées de l'inconnue, convergentes en plus. Mais pour éviter des calculs inutiles, on peut, au moyen de quelques opérations ajoutées à celles qui ont donné les équations en $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_r$, obtenir une limite, en plus, de ξ_r, et par conséquent de toutes les valeurs approchées de ξ, depuis la première jusqu'à la $r^{ième}$. Nous prendrons d'abord un exemple particulier, et nous traiterons ensuite ce sujet d'une manière générale.

Dans l'exemple qui nous a servi, on a trouvé $\frac{1}{165925}$ ou $\frac{1}{25.6637}$, pour la valeur de π_3, c'est-à-dire, de la limite, en moins, de ξ_3. Faisant donc $\xi_3 = \frac{1}{25.6637}\xi'_3$, et calculant les équations en ξ'_3, (ξ'_3-1), (ξ'_3-2), on trouve pour les coefficiens des équations....

en (ξ'_3-1)...1331+13877210493+4089986231049o7—12049759756
en (ξ'_3-2)...1331+13877230424+4090013985489o8+4089879610675 21.

Puis on fait $10^3(\xi'_3-1)=\xi''_3$; et l'on obtient les coefficiens des équations....

en ξ''_3.....1331+13877210490000+4089986231049070000000—12049759756000000000
en (ξ''_3-1)...1331+13877210529933+4089986258803491019933+396948864736628050331.

Donc la limite, en plus, de ξ''_3 est....

$$\frac{408998\ldots\ldots\ldots\ldots}{408998\ldots\ldots\ldots\ldots+396948\ldots\ldots\ldots\ldots} \text{ ou } \frac{408998\ldots\ldots\ldots\ldots}{805897\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

On peut donc faire $\xi''_3 < \frac{409}{805}$; et par conséquent....

$$\xi'_3 < 1 + \frac{409}{805000}; \text{ et } \xi_3 < \frac{1}{165925} + \frac{409}{165925.805000};$$

D'une autre part, on a $\xi_3 > \frac{1}{165925}$.

Donc, en se tenant à cette dernière valeur, l'erreur est moindre que $\frac{409}{165925.805000}$ ou 0,000000003062....

Bien plus, dans l'exemple qui nous occupe, il suffit de jeter les yeux sur les coefficiens de l'équation en ξ''_3 pour reconnoître qu'on a

$$\xi''_3 < \frac{1}{10}, \text{ et par conséquent } \xi'_3 < 1 + \frac{1}{10000};$$

$$\text{et... } \xi_3 < \frac{1}{165925} + \frac{1}{1659250000};$$

donc l'erreur est moindre que 0,000000000602681 9....

Il suffisoit même de l'équation en $(\xi'_3 - 1)$ pour s'assurer d'un tel résultat, puisqu'à la seule inspection des coefficiens de cette équation, on peut reconnoître que l'on a $\xi'_3 - 1 < \frac{1}{10000}$.

Cette même équation fait voir que $\xi'_3 - 1$ est plus grand que $\frac{1}{41000}$; donc on a

$$\xi'_3 > 1 + \frac{1}{41000}, \text{ et } \xi_3 > \frac{1}{165925} + \frac{1}{165925.41000},$$

ou $> 0,00000602681 9... + 0,000000000 1469....$

ou bien $> 0,00000602696.....$

On a de l'autre part.....

$$\xi_3 < \frac{1}{165925} + \frac{1}{1659250000};$$

ou $< 0,00000602681 9.... + 0,000000000 6026....$

ou bien $< 0,00000602742....$

Ici la différence des deux limites est 0,0000000046....

Donc, si l'on prend une des deux limites pour la valeur de ξ_3, l'erreur ne peut avoir lieu qu'à la dixième décimale.

Ainsi la valeur exacte de x, dans l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$, est entre

2,0945514813.....et 2,0945514844.....

et même entre....

2,0945514815.....et 2,0945514819.....

En prenant le premier de ces nombres, ou l'un des deux derniers, pour la valeur approchée de x, on est assuré que cette valeur est exacte jusqu'à la neuvième décimale, inclusivement, comme nous l'avons annoncé plus haut.

On est également assuré par ce moyen, que les deuxième et troisième valeurs approchées en moins, que nous avons trouvées ci-dessus pour x, sont, respectivement, exactes jusqu'à la seconde et à la quatrième décimale, inclusivement.

La dixième approximation, suivant le procédé de M. Lagrange, a bien donné la huitième décimale exacte, mais l'exactitude de cette décimale n'est pas assurée par le procédé même, vu qu'il indique pour limite de l'erreur, 0,000000163...; d'où il résulte que la valeur de x est comprise entre....

2,094551470 2.....et 2,094551486 5.....

et que l'exactitude de la valeur approchée n'est garantie que pour les sept premières décimales.

(e) Voici maintenant comment on peut procéder d'une manière générale.

Soient

$$\xi_1 = X\,;\ \pi_1 = \frac{1}{K}\,;\ \text{et } KX = X'.$$

X n'ayant qu'une valeur entre o et 1, X' n'en a qu'une seule entre o et K.

On se procurera donc les deux transformées en $(X' - P')$ et $(X' - P' - 1)$ dont les termes tout connus sont de signes contraires; P' étant $< K$.

Ces deux transformées fournissent déjà une double limite, en plus et moins, pour $(X' - P')$, et par conséquent pour X. Mais pour avoir des limites plus resserrées, on fera..... $10^n (X' - P') = X''$; et comme $(X' - P')$ n'a qu'une seule valeur entre o et 1, X'' n'en a qu'une seule entre o et 10^n.

On se procurera donc les deux transformées en $(X'' - P'')$ et $(X'' - P'' - 1)$ dont les termes tout connus sont de signes contraires; P'' étant $< 10^n$.

Ces deux transformées donneront une double limite, en plus et en moins, de $(X'' - P'')$, et par conséquent, de X' et de X.

Soit la limite en moins $= \frac{1}{K''}$; et la limite en plus $= \frac{1}{A''}$.

On aura $X''-P'' > \frac{1}{K''}$, et $< \frac{1}{A''}$;

d'où $X'' > P'' + \frac{1}{K''}$, et $< P'' + \frac{1}{A''}$;

et $X'-P' > \frac{P''}{10^N} + \frac{1}{10^N K''}$, et $< \frac{P''}{10^N} + \frac{1}{10^N A''}$;

d'où X' ou $KX > P' + \frac{P''}{10^N} + \frac{1}{10^N K''}$, et $< P' + \frac{P''}{10^N} + \frac{1}{10^N A''}$;

et enfin $X > \frac{P'}{K} + \frac{P''}{10^N K} + \frac{1}{10^N K K''} \ldots\ldots$

et $X < \frac{P'}{K} + \frac{P''}{10^N K} + \frac{1}{10^N K A''}$.

Si l'on prend pour X une de ces deux limites, l'erreur sera moindre que leur différence, qui est $\frac{1}{10^N K}\left(\frac{K''-A''}{K''A''}\right)$.

Soit $N'+1$ le nombre de chiffres que renferme le nombre entier K. Il est évident que l'erreur sera $< \frac{1}{10^{N+N'}}$; d'où il suit que si on veut obtenir, par ce procédé, une valeur approchée, exacte jusqu'à la $n^{ième}$ décimale au moins, il faut, pour en être généralement sûr, prendre $N = n - N'$.

C'est ainsi que dans l'exemple dont on s'est servi, K ou 165925 étant composé de six chiffres, d'où $N' = 5$, on a dû faire $N = 3$, si l'on a prétendu avoir une valeur exacte jusqu'à la huitième décimale.

Dans ce même exemple, P'' s'est trouvé $= 0$, et $P' = 1$; ce qui a rendu le calcul très-expéditif. En pareil cas, si l'on s'en tient à $\frac{1}{K}$ pour la valeur de X approchée en moins, l'erreur est toujours moindre que $\frac{1}{10^N K A''}$; et par conséquent $< \frac{1}{10^{N+N'}}$.

(f) Ce procédé pourroit être étendu à la recherche de plusieurs racines comprises entre deux nombres entiers consécutifs, et l'on tireroit pour lors un assez bon parti du *criterium* que nous avons généralisé dans la note (N). Mais il nous paroît

inutile d'entrer dans ces détails. Notre principal objet dans cet Ouvrage, a été de présenter, pour la résolution des équations numériques, une Méthode qui fût praticable, comme *mécaniquement*; la science du calcul pouvant, de même que les arts, avoir ses *manouvriers*, et en tirer, dans des travaux en grand, de notables avantages. Sous ce rapport, notre Méthode générale sera peut-être préférée au procédé particulier que nous donnons ici, surtout si l'on ne veut avoir des racines exactes que jusqu'à la seconde ou troisième décimale.

(g) L'évaluation des racines en fractions continues, suivant le procédé de M. Lagrange, est particulièrement recommandable, lorsqu'elle fait connoître les facteurs commensurables du second degré dans un polynome qu'on se propose de décomposer en facteurs de ce degré. Mais quand il ne s'agit que de la résolution, proprement dite, d'une équation numérique, ce procédé ne nous paroît pas préférable à l'approximation en nombres décimaux, soit pour la commodité des calculs, soit pour la rapidité de l'approximation. De plus, la méthode de M. Lagrange et la nôtre étant de telle nature qu'on y procède simultanément à la vérification et à l'approximation des racines, il semble que c'est surtout à ces deux Méthodes que l'évaluation des racines en fractions continues ne sauroit être généralement convenable. Par exemple, dans celle de l'illustre Géomètre, si le nombre D, ou la limite de la plus petite différence des racines, étoit un millième, il est évident que chaque racine seroit tout à la fois reconnue et appréciée, à moins d'un millième près. Or il paroît infiniment dur, lorsqu'on a obtenu par des milliers de substitutions, une valeur aussi approchée, d'être forcé de rétrograder jusqu'à la valeur du plus grand nombre entier contenu dans cette racine, pour chercher une nouvelle évaluation en fractions continues.

C'est par un semblable motif, joint à quelques autres, que nous n'avons pas cru devoir adapter ce procédé à notre

Méthode ; et ce motif semble plus décisif encore dans la Méthode de M. Lagrange, qui exige un bien plus grand nombre d'opérations pour la manifestation des premières limites des racines. En effet, lorsque D est, par exemple, un millième, on ne peut, suivant la méthode dont il s'agit, découvrir deux racines moindres que l'unité, telles que 0,920... et 0,921..., qu'au moyen de neuf cent vingt-deux substitutions, tandis que le nombre des transformées exigées pour le même objet dans la nouvelle Méthode, égale seulement $10+3+2$, c'est-à-dire, 15. En un mot, s'il faut découvrir une racine ayant n décimales, la recherche de ces décimales n'exige au plus que $10.n$ transformations, tandis qu'elle peut exiger jusqu'à 10^n substitutions, suivant la progression 0, D, 2D, etc.

(h) La comparaison que nous venons de présenter, concernant le nombre des opérations, dans la nouvelle Méthode des transformées, et dans la Méthode des substitutions successives, telle qu'elle a été perfectionnée par M. Lagrange, a donné lieu à une observation qu'il est bon de rapporter ici, ne fût-ce que pour empêcher qu'elle ne soit désormais reproduite.

« Si la résolution des équations, a-t-on dit, exigeoit » l'emploi d'une pareille Méthode (*celle de M. Lagrange*), » assurément celle de l'Auteur, quoique très-longue, mériteroit » encore la préférence. Mais, pour l'ordinaire, on ne procède » pas ainsi. La Méthode de Newton, qui est la plus usitée, » suppose qu'on connoît, soit par la voie des substitutions, » soit par des constructions géométriques, une première valeur de x, qui approche au moins dix fois plus d'une racine » de l'équation que de toute autre racine ; et d'après cette » valeur, on en trouvera facilement une autre dont l'erreur » n'est qu'environ le quarré de la première, savoir $\frac{1}{100}$, si la » première valeur est $\frac{1}{10}$. Une seconde opération qu'on peut » faire par la même formule, réduit l'erreur du centième à

» son quarré, qui est d'environ $\frac{1}{10000}$, et ainsi de suite. D'où » l'on voit que l'approximation continuelle est beaucoup plus » rapide par cette Méthode que par celle que propose l'Auteur. » [*Il s'agit de celle que nous avons exposée au Chapitre VI*].»

Une pareille observation prouve que son Auteur n'a nullement compris l'état de la question. Nous nous sommes proposé de comparer deux Méthodes qui, l'une et l'autre, procèdent simultanément à la vérification et à l'approximation des racines, et qui jouissent, toutes deux, de l'avantage de résoudre généralement et avec certitude, une équation numérique, dans des cas où toutes les Méthodes précédentes échouent, ou n'aboutissent qu'à des résultats faux ou douteux : et l'on vient nous opposer le procédé de Newton, qui n'est pas même une méthode de résolution proprement dite, et qui d'ailleurs, comme nous l'avons dit plus haut d'après M. Lagrange, n'a pas même le mérite d'être généralement sûr ! Ce procédé, fût-il aussi sûr qu'il l'est peu, est évidemment insuffisant pour l'approximation des racines qui, étant par exemple, 8,1...8,2...8,3..., ont une même première valeur connue 8, tandis que, dans notre Méthode, il ne faut que quelques instans pour découvrir la décimale de chacune de ces racines. Et c'est un procédé aussi incertain qu'incomplet qu'on a prétendu opposer à une Méthode générale et sûre !

Encore une fois, nous en appelons à la pratique. Qu'on se donne la peine de résoudre les équations numériques par les diverses Méthodes, et l'on verra qu'abstraction faite du procédé approximatif indiqué dans cette note, notre Méthode générale, même en ne faisant découvrir, qu'un à un, les chiffres de la racine, est encore celle qui, dans son ensemble, se trouve en même temps, la plus sûre et la plus expéditive. Bien plus, dans certains cas, on sera forcé de reconnoître qu'elle est la seule praticable.

Il faut l'avouer, cette observation, que nous avons rapportée *textuellement*, et l'objection citée au n° 48, réunies à quelques

autres indices, ont paru provenir d'une disposition d'esprit peu favorable, et nous ont rappelé la pensée de Pascal au sujet de ceux qui inventent. Il faut sans doute, suivant son conseil, que celui qui a rencontré quelques inventions, *ne se pique point* de cet avantage. Quand on considère un objet sous toutes ses faces, avec une attention persévérante, il est difficile qu'il ne se présente pas à l'esprit quelques vues nouvelles; et, ce qui semble réduire à peu de chose cette gloire à laquelle on croit pouvoir prétendre par des inventions scientifiques, c'est que la science même a ses hasards, et que souvent les inventions s'offrent comme fortuitement à l'esprit, à l'instant même où ses recherches le portoient ailleurs. Mais il peut, du moins, être permis à l'auteur d'une découverte utile, de desirer que la communication qu'il en donne, soit accueillie avec quelque bienveillance.

(X) Quoique l'on puisse tirer quelque parti de la nouvelle Méthode pour la détermination des racines imaginaires, nous ne nous arrêterons point à cet objet, qui appartient au problême de la décomposition d'un polynome en facteurs réels du second degré, plutôt qu'à celui de la résolution des équations numériques; l'objet essentiel de cette résolution étant de trouver les valeurs réelles qui peuvent être attribuées à l'inconnue. C'est ce qu'a reconnu M. Lagrange, lorsqu'il a donné des moyens de trouver une limite de la plus petite différence des racines, sans recourir à l'équation aux quarrés de leurs différences.

Cependant l'illustre auteur a cru pouvoir surabondamment se servir de cette équation, qui donne la valeur de la quantité B précédée du signe — sous le radical dans les racines imaginaires, pour déterminer, au moins par approximation, la partie réelle de ces racines. Pour cela on substitue $A + \sqrt{-B}$ à x, dans la proposée, et on en tire deux équations en A, dont l'une a tous ses termes réels, et dont l'autre a tous ses termes multipliés par $\sqrt{-B}$, facteur commun que l'on fait disparoître; ce

qui rend les termes de la seconde équation tous réels, parce qu'ils ne dépendent alors, ainsi que ceux de la première, que du quarré de $\sqrt{-B}$, c'est-à-dire, de $-B$.

Ensuite, procédant à la recherche du plus grand commun diviseur de ces deux équations, on s'arrête au reste où A n'est plus qu'au degré n et au-dessous, n étant le nombre des valeurs égales que l'équation au quarré des différences a fournies pour B. Ce reste étant égalé à zéro, on y substitue à B sa valeur exacte ou approchée, et cette équation étant ainsi devenue numérique, on en tire les valeurs réelles de A.

Cette résolution a, comme l'on voit, l'inconvénient d'exiger la formation de l'équation aux quarrés des différences; mais en outre, il semble qu'on puisse douter qu'elle soit *généralement* exacte dans les cas où le plus grand commun diviseur est de plusieurs dimensions. Car la substitution de la valeur approchée de B ne donnant aux coefficiens de l'équation en A qu'une valeur approchée, ne peut-il pas arriver que cette altération, même très-légère, change la nature des racines de l'équation, en substituant des racines imaginaires à des racines réelles, *et vice versâ ?*

Lorsque le reste égalé à zéro est seulement du premier degré, et qu'on a ainsi déterminé la valeur de A en fonction de B, il semble qu'en y donnant à B deux valeurs respectivement approchées en plus et en moins, il en doit provenir deux limites entre lesquelles se trouve la valeur exacte de A. Cependant le résultat même obtenu par M. Lagrange, dans la résolution de l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$, est évidemment fautif. D'après ce résultat, la valeur de A seroit comprise entre $-\frac{15}{16}$ et $-\frac{15}{18}$. [*De la Résolution* etc., pag. 39]. Or on a vu plus haut que la racine positive de l'équation est bien certainement 2,0945...; et son second terme ayant zéro pour coefficient, il s'ensuit avec la même certitude, que A égale la moitié de cette racine positive, précédée du signe —; on voit donc que la valeur exacte de A est comprise entre —1,047... et —1,048... Ce résultat

n'est nullement d'accord avec le précédent ; ce qui vient apparemment de quelque erreur de calcul.

L'observation que nous avons faite sur le changement possible de la nature des racines d'une équation par une légère altération dans la valeur de ses coefficiens, peut aussi inspirer quelque doute sur la légitimité de la résolution de deux équations à deux inconnues x et y, lorsqu'après l'élimination de x, on obtient pour y une valeur seulement approchée, dont la substitution ne peut produire que des coefficiens d'une valeur approchée pour l'équation en x. La même difficulté se rencontre dans la décomposition d'un polynome en facteurs du second degré.

D'une autre part, il seroit extrêmement fâcheux de ne pouvoir, en aucun cas, se fier aux résultats qu'on obtiendroit d'une équation numérique, propre à résoudre un problême physico-mathématique, lorsqu'on n'a point la valeur rigoureuse de ses coefficiens. Il est donc à desirer que l'on trouve quelque règle certaine qui fasse connoître quelles sont les équations dont les racines ne changent point de nature, malgré l'altération produite dans leurs coefficiens.

(Y) On auroit un grand embarras de moins, si l'on pouvoit découvrir toutes les valeurs réelles de l'inconnue, sans dépouiller l'équation des racines égales qu'elle peut avoir. On a vu que, dans notre Méthode [46], la présence des racines égales commensurables ne forme point un obstacle à la résolution d'une équation ; et il est aisé d'appercevoir que la présence des racines égales imaginaires n'en forme pas davantage. Bien plus, lorsqu'on sait d'avance que toutes les racines de l'équation sont réelles, on peut la résoudre, sans qu'elle ait été préalablement dépouillée de ses racines multiples, même de celles qui sont réelles incommensurables. Car une fois qu'on sera parvenu à reconnoître l'existence d'une racine, au moins, entre deux limites qui ne diffèrent que d'une unité décimale de l'ordre que l'on veut, ou qu'exige le problême dont la solution dépend de l'équation à résoudre, il est indifférent, pour

Digitized by Google

la pratique, que la valeur trouvée appartienne à une ou à plusieurs racines, soit absolument égales entr'elles, soit égales seulement jusqu'à tel chiffre demandé. L'essentiel est que l'on connoisse toutes les valeurs réelles qui représentent, jusqu'au degré requis d'exactitude, celles dont l'inconnue de l'équation est susceptible.

D'après cette considération, on pourroit même, dans tous les cas, laisser subsister les racines égales d'une équation numérique, si l'on avoit le moyen de connoître une limite, en moins, de la valeur de φ, c'est-à-dire, de la plus petite valeur que pourroit avoir la partie des racines imaginaires représentées par $A \pm \sqrt{-\varphi}$, précédée du signe — sous le signe $\surd$.

En effet, lorsque l'existence d'une couple de variations dans la collatérale en $(z_p - 1)$ a donné lieu de présumer qu'il y a une couple de racines réelles entre 0 et 1, dans l'équation en $(x-p)$, et qu'on est ensuite parvenu à l'équation en..... $(x^{(n)} - p^{(n)})$ et à sa collatérale, sans que cette présomption soit détruite, on en peut conclure que la présomption se change en certitude, quand on sait d'ailleurs que, si les deux racines qui occasionnent les variations dont il s'agit étoient des imaginaires de la forme $A \pm \sqrt{-\varphi}$, la valeur de φ seroit, d'après sa limite en moins, plus grande que $\frac{1}{4 \times 10^{2n}}$; car, dans ce cas, l'existence de ces racines imaginaires devroit se manifester par l'équation collatérale en $(z^{(n)}_{p^{(n)}} - 1)$, qui n'auroit point de variations de signe, et la présomption de l'existence des racines réelles entre p et $p+1$ devroit être ainsi détruite [66].

Or il paroit qu'en substituant $\sqrt{-\varphi}$ à l'inconnue de l'équation en $\left(x - p - \frac{p'}{10} \ldots - \frac{p^{(n)}}{10^n}\right)$, on peut déterminer une limite de la plus petite valeur dont φ soit susceptible, la valeur de la partie réelle A étant supposée exister entre...

$$p + \frac{p'}{10} + \ldots + \frac{p^{(n)}}{10^n} \text{ et } p + \frac{p'}{10} + \ldots + \frac{p^{(n)}+1}{10^n}.$$

L'objection qui résulte de la légère altération des coefficiens, se représente ici, mais moins grave que dans la note précédente. Il semble bien que cette altération, toute légère qu'elle puisse être, suffit pour rendre positif, dans l'équation en φ, tel coefficient, qui eût été négatif, si l'on n'avoit pas pris pour A une valeur simplement égale à $p+\frac{p'}{1}+\ldots+\frac{p^{(n)}}{10^n}$; ou bien, *vice versâ*. Mais cet inconvénient ne paroît devoir conduire qu'à l'obligation de modifier la manière de déterminer la limite, en moins, des racines d'une équation numérique. Cette manière dépend, comme on sait, de celle de trouver la limite, en plus, des racines de l'équation inverse. C'est donc cette dernière détermination qu'il faudra modifier, en prenant le plus grand de tous les coefficiens de cette équation, au lieu du plus grand coefficient de signe contraire à celui de son premier terme. Au surplus, nous n'entendons donner ici qu'un simple apperçu, concernant la possibilité de conserver les racines égales dans la nouvelle Méthode.

(Z) On voit que nous nous sommes frayé une route bien différente de celle qui a été tracée par l'illustre Auteur du *Traité de la Résolution des Equations numériques*. Mais c'est en nous fortifiant par la lecture de ses écrits, que nous avons appris à marcher seuls, et nous nous plaisons à lui rendre ici cet hommage.

Tout en recommandant aux Auteurs de son temps, la lecture assidue des écrits des Grecs.....

(Vos exemplaria græca
Nocturnâ versate manu, versate diurnâ),

Horace ne savoit pas mauvais gré aux Ecrivains de Rome de ne pas se traîner servilement sur les pas de leurs Maîtres, et d'oser aussi marcher dans leurs propres voies.....

Nec minimum meruêre decus vestigia græca
Ausi deserere.....

FIN.

TABLE.

EPITRE DÉDICATOIRE A SA MAJESTÉ L'EMPEREUR ET ROI.

AVANT PROPOS.

CHAPITRE I. *Histoire abrégée des travaux entrepris sur cette matière pendant les deux derniers siècles.* Page 1

CHAPITRE II. PROBLÊME PRÉLIMINAIRE : *Etant donnée une équation numérique en* x *d'un degré quelconque, trouver par de simples additions et soustractions les coefficiens de sa transformée en* (x — 1), *et généralement de sa transformée en* (x — n), n *étant un nombre entier ou décimal.* 11

CHAPITRE III. *Diverses notions fournies par l'Algèbre, concernant les équations numériques.* 21

CHAPITRE IV. *Exposition de la nouvelle Méthode. Première partie. Cas où l'on n'a besoin que de cette partie de la Méthode.* 27

CHAPITRE V. *Suite de l'exposition de la nouvelle Méthode. Seconde partie. Cas où cette seconde partie, jointe à la première, suffit pour faire découvrir les limites de toutes les racines réelles d'une équation.* 35

CHAPITRE VI. *Fin de l'exposition de la nouvelle Méthode. Troisième partie.* 42

NOTES.

NOTES *sur le* CHAPITRE I. — *Inconvéniens des substitutions opérées suivant la progression* 0, D, 2D, 3D etc., D *étant la limite de la plus petite différence des racines d'une équation.* — *Du plagiat imputé à Descartes par les Géomètres Anglois.* 49

Digitized by Google

NOTES *sur le* CHAPITRE II. — *Sur les deux propositions dont dépend l'Algorithme indiqué dans ce Chapitre. — Extension de cet Algorithme.* Page 52

NOTES *sur le* CHAPITRE III. — *Moyen de reconnoître les fractions qui sont les limites, en plus et en moins, des racines qu'une équation peut avoir entre zéro et* 1. 54

NOTES *sur le* CHAPITRE IV. — *Eclaircissement sur un cas particulier.* 55

NOTES *sur le* CHAPITRE V. — *Divers indices propres à manifester, dans une équation, l'absence de toute racine réelle entre zéro et* 1. — *Circonstances où l'on est dispensé de recourir aux transformées collatérales. — Généralisation du* CRITERIUM *indiqué dans ce Chapitre.* 57

NOTES *sur le* CHAPITRE VI. — *Du passage de l'équation en* $(x^{(n)} - p^{(n)})$ *à celle en* $\left(x - p - \frac{p'}{10} - \ldots\ldots - \frac{p^{(n)}}{10^n}\right)$. *— Moyen d'obtenir la* PREUVE *des opérations dans la nouvelle Méthode. — Nouveau procédé d'approximation. Son application à l'équation* $x^3 - 2x - 5 = 0$. *— Parallèle du résultat de ce procédé, qui donne exactement la quatrième valeur approchée de* x, *jusqu'à la neuvième décimale inclusivement, avec les résultats obtenus pour la même racine, par les procédés approximatifs de* NEWTON *et de* M. LAGRANGE. *— Raison de douter si la résolution approchée des racines imaginaires, suivant le procédé de ce dernier géomètre, peut être considérée comme admissible dans tous les cas. — Apperçu concernant la possibilité de conserver les racines égales dans une équation à résoudre suivant la nouvelle Méthode.* 65 *et suivantes.*

FIN DE LA TABLE.

Digitized by Google

Errata pour ce Volume.

Page 106, ligne 16; après ce mot l'immersion, *ajoutez* et l'émersion.
Page 132, ligne 18; au lieu de q, *lisez* p.
Page 140, avant-dernière ligne; au lieu de 11°,40092; *lisez* 11°,39349.
Page 148, dans le terme $-(1+\rho')\frac{s''}{\zeta}\cdot\frac{ds''}{dv''}$, *substituez* $(1+\rho')^2$, au lieu de $(1+\rho')$. Faites la même substitution dans les termes analogues des pages 156, 163 et 168.
Page 150, lignes 1 et 8; au lieu de sin. V, *lisez* cos. V.
Page 157, ligne 3, au lieu de $-0{,}00039871.\sin.V$, *lisez*

$$1-0{,}00039871.\cos.V.$$

Ibid. ligne 10; au lieu de $-517'',4$, *lisez* $-482'',7$; et au lieu de sin. V, *lisez* cos. V.
Ibid. ligne 13; au lieu de sin. V, *lisez* cos. V.
Page 163, lignes dernière et avant-dernière, *changez* les sinus en cosinus.
Page 164, lignes 6, 7, 8, 9, au lieu des nombres

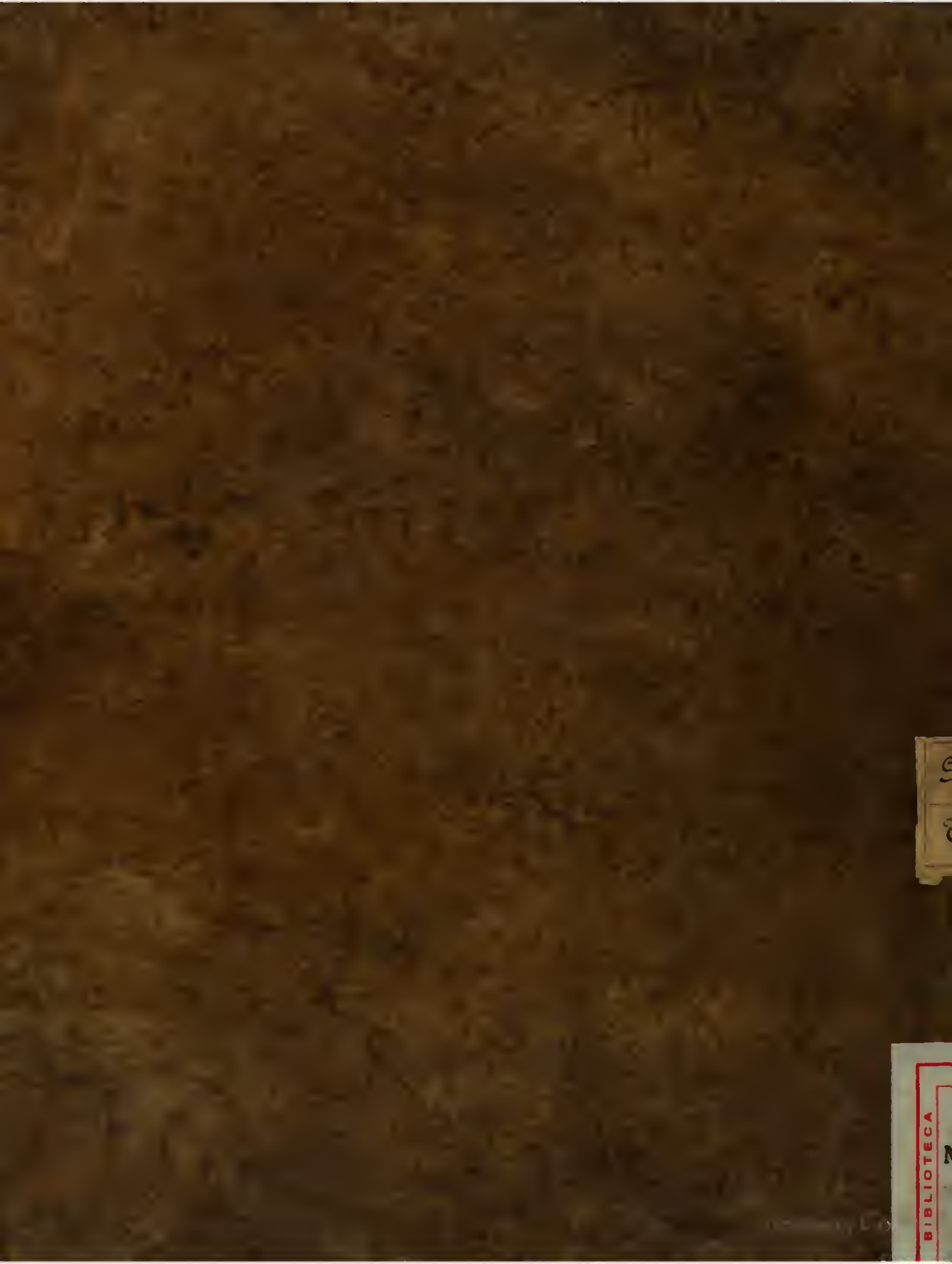
$$0{,}507629,\quad -0{,}076569,\quad -0{,}005571,\quad -0{,}0009214,$$

substituez

$$0{,}544124,\quad -0{,}082079,\quad -0{,}005972,\quad -0{,}001034.$$

Page 167, lignes 1 et 2; *substituez* θ, au lieu de v sous le signe sin.
Page 172, ligne 15; au lieu de 39,23''44, *lisez* 3923'',44.
Page 264, ligne 19; au lieu de 309303'', *lisez* 30930'',3.

679574
SBN


BIBLIOTECA